Mecânica Quântica I da PG - 2019.1 - IF-UFF - Lista de exercícios n. 5

(Dated: May 27, 2019)

I. ESTA LISTA NÃO PRECISA SER ENTREGUE

Ex. 1 (Incerteza energia/tempo.) Existe uma versão interessante do princípio de energia/tempo, em que tomamos o intervalo $\Delta t = \tau/\pi$, onde τ é o tempo que leva o ket $|\psi(t=0)\rangle$ para evoluir até que $|\psi(t)\rangle$ seja ortogonal a $|\psi(t=0)\rangle$. Teste a validade do princípio de incerteza energia-tempo para o estado inicial

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|E_n\rangle + |E_k\rangle), \tag{1}$$

onde $|E_n\rangle$ e $|E_k\rangle$ são dois auto-estados arbitrários da energia em um potencial também arbitrário. Referência: Lev Vaidman, Am. J. Phys. 60, 182 (1992) (dá para pegar o pdf na homepage do autor).

Ex. 2 (Estados comprimidos.)
Considere um novo conjunto de operadores criação e aniquilação definidos em termos dos operadores x e p através das relações

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{\frac{m\omega'}{2\hbar}}(x + i\frac{p}{m\omega'}) \\ b^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega'}{2\hbar}}(x - i\frac{p}{m\omega'}) \end{aligned} \tag{2}$$

onde ω' é um parâmetro arbitrário (ou seja, pode ser diferente da frequência angular de oscilação ω do OH).
a) Mostre que podemos escrever as seguintes relações

$$\begin{aligned} b &= \lambda a + \nu a^\dagger \\ b^\dagger &= \lambda a^\dagger + \nu a \end{aligned} \tag{3}$$

onde λ e ν são parâmetros reais tais que $|\lambda|^2 - |\nu|^2 = 1$.
b) Calcule $\langle(\Delta x)^2\rangle$ e $\langle(\Delta p)^2\rangle$ para um ket de estado $|\beta\rangle$ que é auto-estado do operador b, isto é $b|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle$. Compare os valores obtidos com os conhecidos do oscilador harmônico simples de frequência natural ω, tendo em vista que ω' é um parâmetro arbitrário.
c) Usando os resultados do item anterior, mostre que estado $|\beta\rangle$ satisfaz a relação de incerteza mínima.
OBS: Os estados $|\beta\rangle$ são conhecidos como estados comprimidos do oscilador harmônico simples.

Ex. 3 (Corrente de probabilidade de carga no campo eletromagnético.) O operador Hamiltoniano de uma partícula de massa m e carga e em um campo eletromagnético é dada por:

$$H = \frac{\Pi^2}{2m} + e\phi, \tag{4}$$

onde aparece o momento cinemático (ou mecânico) $\Pi = \vec{p} - \frac{e\vec{A}}{c}$.
a) Prove a equação de continuidade para partículas carregadas em campo magnético:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \tag{5}$$

onde

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{m} Im(\psi^* \nabla \psi) - \left(\frac{e}{mc}\right)\vec{A}|\psi|^2. \tag{6}$$

b) Escrevendo a função de onda na forma polar $\psi = \sqrt{\rho} exp(iS/\hbar)$, obtenha $\vec{j}$ na forma alternativa

$$\vec{j} = \left(\frac{\rho}{m}\right)\left(\nabla S - \frac{e\vec{A}}{c}\right). \tag{7}$$

Dicas: o Sakurai já fez parte do trabalho; acompanhe a derivação da equação de continuidade sem o campo, feita em sala.

Ex. 4 (Elétron em campo B uniforme) Um elétron se move na presença de um campo magnético uniforme na direção z: $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$.
a) Qual é o operador Hamiltoniano desse sistema?
b) Calcule $[\Pi_x, \Pi_y]$.
c) Defina um operador $\bar{y} = \frac{c}{eB}\Pi_x$. Calcule $[\bar{y}, \Pi_y]$.
c) Usando o resultado dos itens acima, reescreva a Hamiltoniana do sistema usando os operadores $\bar{y}, \Pi_y$ e p_z. Compare com a Hamiltoniana do oscilador harmônico para mostrar que as energias do elétron em campo magnético constante são:

$$E_{k,n} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \left(\frac{|eB|\hbar}{mc}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right), \tag{8}$$

onde $\hbar k$ é o autovalor contínuo do operador p_z e n é um inteiro não negativo.