Mecânica Quântica I da PG - 2019.1 - IF-UFF - Lista de exercícios n. 3

(Dated: May 6, 2019)

Ex. 1 (Esfera de Bloch para estados mistos.)

Na 2a lista introduzimos a esfera de Bloch, uma parametrização em que estados puros aparecem como pontos na superfície de uma esfera unitária. Vamos agora generalizar a esfera de Bloch para representar também estados mistos.
a) Mostre que uma matriz densidade arbitrária para um sistema de dois níveis pode ser escrita como:

$$\rho = \frac{I + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}}{2} \tag{1}$$

onde I é o operador identidade e $\vec{r}$ é um vetor tridimensional tal que $||\vec{r}|| \leq 1$. As matrizes σ são as matrizes de Pauli. Esse vetor é conhecido como o vetor de Bloch que representa ρ.
b) Qual é o vetor de Bloch da matriz densidade maximamente mista, $\rho = I/2$?
c) Mostre que um estado ρ é puro se e somente se $||\vec{r}|| = 1$.
d) Escreva os componentes x, y, z de $\vec{r}$ em função dos valores esperados de σ_x, σ_y e σ_z.
e) Mostre que, no caso de estados puros, esta representação se reduz à esfera de Bloch que já discutimos.

Ex. 2 (Matriz densidade reduzida.) Vamos discutir propriedades de estados de dois sistemas de spin 1/2. Considere os dois estados abaixo:

$$|\psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle),\, |\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle). \tag{2}$$

onde $|\pm\rangle$ são os autoestados de S_z (de cada subsistema) com autovalores $\pm\hbar/2$.
a) Prove que eles podem ser perfeitamente distinguidos um do outro, mesmo se você só tiver um sistema em cada uma das duas funções de onda. Descreva explicitamente uma medida que faz isso. Dica: relembre os estados com momento angular bem-definido de dois spins 1/2.
b) Calcule as matrizes-densidade reduzidas de cada spin para os dois estados acima. É possível distinguir os dois estados usando medidas de observáveis de um único spin? Lembre que observáveis de um único spin têm a forma $A \otimes I$ ou $I \otimes A$, onde I é a identidade.

Ex. 3 (Correlações que violam a desigualdade CHSH.) Para violar a desigualdade CHSH, A e B medem seus spins 1/2 em um estado maximamente emaranhado. A mede a polarização do 1o spin em uma direção, e B mede a polarização do 2o spin em outra direção, ou seja, conjuntamente eles medem o observável $\vec{S}_A \cdot \hat{n}_A \otimes \vec{S}_B \cdot \hat{n}_B$.
a) Calcule o valor esperado desse observável como função do ângulo θ entre $\hat{n}_A$ e $\hat{n}_B$.
b) Mostre que as medidas nos ângulos indicados em sala violam a desigualdade.

Ex. 4 (Estados mistos, puros, emaranhados.)

Nesta questão, os vetores $|u\rangle, |v\rangle$ formam uma base ortonormal.

a) Determine quais dos operadores ρ_1, ρ_2 e ρ_3 abaixo são matrizes-densidade legítimas, justificando suas respostas. Para cada matriz-densidade legítima, diga se trata-se de estado puro ou misto. Caso seja puro, determine o vetor-estado correspondente.

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 3/4 \end{pmatrix}, \rho_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & -i/4 \\ +i/4 & 1/2 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\rho_3 = \frac{1}{3}|u\rangle\langle u| + \frac{2}{3}|v\rangle\langle v| + \frac{\sqrt{2}}{3}|u\rangle\langle v| + \frac{\sqrt{2}}{3}|v\rangle\langle u|. \tag{4}$$

b) Considere o seguinte estado de um sistema composto de dois sistemas A, B, cada um com dois níveis:

$$|\psi\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}|u\rangle_A \otimes |u\rangle_B + \frac{1}{2}|u\rangle_A \otimes |v\rangle_B + \frac{1}{2}|v\rangle_A \otimes |v\rangle_B. \tag{5}$$

Prove que esse estado é emaranhado, e explique o que isso significa em termos das descrições dos subsistemas e do sistema completo.

I. OUTROS PROBLEMAS RECOMENDADOS

Sakurai cap 1: 18, 25, 27, 29.