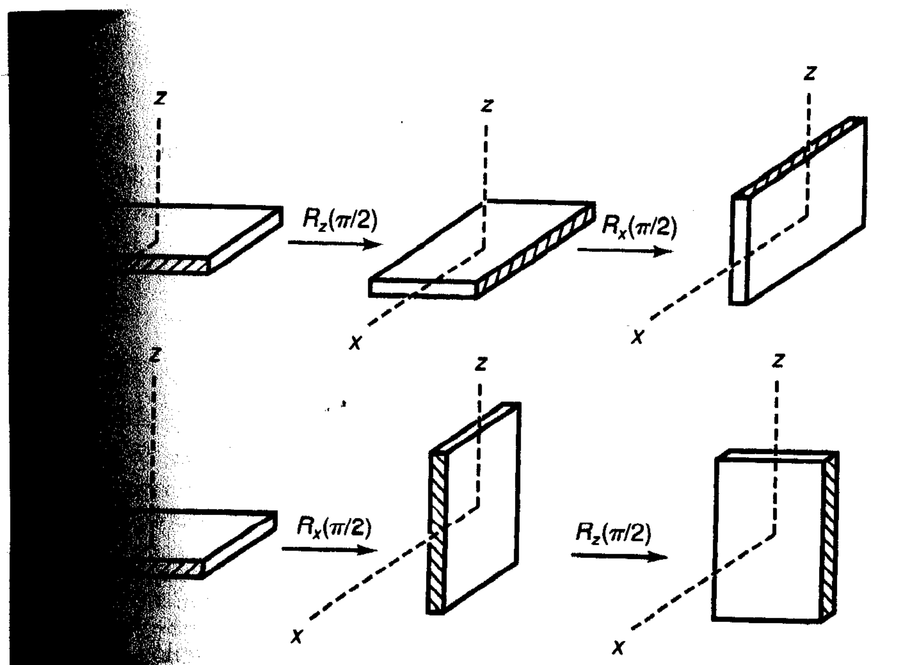
Teoria do momento angular [SAK 3.1]

- Rotações em torno de eixos diferentes não comutam. Veremos que as relações de comutação dos componentes do momento angular são consequência disso.
- Vamos começar estudando essa não-comutatividade das rotações.

Exemplo da não-comutatividade de rotações



E 3.1. Example to illustrate the noncommutativity of finite rotations.

Recordação - Rotações no espaço R_3

- Representadas por matrizes 3×3 reais e ortogonais: $RR^T = R^T R = \mathbb{1}$.
- Vetores se transformam assim:
$$\begin{pmatrix} V_x' \\ V_y' \\ V_z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$
- Matrizes ortogonais preservam a norma de $\vec{v}$.

Rotação de ϕ em torno de $\hat{z}$

- Sentido positivo = saca-rolha avança na direção $z>0$.

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_y = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \operatorname{sen}\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix} \qquad R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ 0 & \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Rotações infinitesimais

- $\cos\phi \simeq 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$, $\operatorname{sen}\phi \simeq \varepsilon$ nas matrizes acima.
- Calculo $R_x(\varepsilon)R_y(\varepsilon) - R_y(\varepsilon)R_x(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon^2 & 0 \\ \varepsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_z(\varepsilon^2) - 1$ (ignorando termos de ordem $> \varepsilon^2$).

⇒ Rotações infinitesimais em torno de eixos diferentes comutam até ordem ε.

⇒ Não comutam até ordem ε^2.

ROTAÇÕES INFINITESIMAIS NA MQ

- O estado (ket) descrevendo um sist. quântico vai mudar sob rotações.
- Dado um op. de rotação R (= matriz ortogonal, 3×3), associamos um op. unitário $\mathcal{D}(R)$ no espaço $\mathcal{H}$ tal que

$$|\alpha\rangle_R = \mathcal{D}(R)|\alpha\rangle$$

↑ RODADO   ↑ original

- Repare que a mesma rotação R corresponde a vários op. unitários $\mathcal{D}(R)$, correspondentes ao caso de spin $\frac{1}{2}$ → $\mathcal{D}(R)$ é unitário 2×2

spin 1 → $\mathcal{D}(R)$ 3×3

- Já construímos dois operadores unitários infinitesimais, com forma $U_\varepsilon = \mathbb{1} - i G \varepsilon$

TRANSLAÇÃO: $G = \frac{p_x}{\hbar}$ $\quad \varepsilon = dx'$

evolução temporal: $G = \frac{H}{\hbar}$ $\quad \varepsilon = dt$

⇒ Definimos o op. de momento angular J_K tal que em $G = \frac{J_K}{\hbar}$ $\quad \varepsilon \to d\phi$,

$$\mathcal{D}(R_K,\varepsilon) = \mathbb{1} - \frac{i J_K}{\hbar} d\phi$$ descreve rotação infinitesimal em torno do eixo K por ângulo $d\phi$.

- De forma mais geral: $$\boxed{\mathcal{D}(\hat{n}, d\phi) = 1 - i\left(\frac{\vec{J}\cdot\hat{n}}{\hbar}\right) d\phi}$$ = op. de rotação infinit. $d\phi$ em torno de $\hat{n}$.

- A partir do op. infinitesimal, encontramos o op. de rotações finitas:

$$\boxed{\mathcal{D}_z(\phi) = \lim_{N\to\infty} \left(1 - i\frac{J_z}{\hbar}\frac{\phi}{N}\right)^N = \exp\left(-\frac{i J_z \phi}{\hbar}\right) = 1 - \frac{i J_z \phi}{\hbar} - \frac{J_z^2 \phi^2}{2\hbar^2} + \dots}$$

• Matrizes de rotação R formam um <u>grupo</u>. Postulamos que $D(R)$ também, logo deve ter as propriedades:

- Identidade: $R \cdot 1 = R$ $\qquad D(R) \cdot 1 = D(R)$

- Fechamento: $R_1 R_2 = R_3$ $\qquad D(R_1)\,D(R_2) = D(R_3)$

- Inversos: $R R^{-1} = 1$ $\qquad D(R)\,D^{-1}(R) = 1$

  $R^{-1} R = 1$ $\qquad D^{-1}(R)\,D(R) = 1$

- Associatividade: $R_1(R_2 R_3) = (R_1 R_2) R_3 = R_1 R_2 R_3$

  $D_1(D_2 D_3) = (D_1 D_2) D_3 = D_1 D_2 D_3$

• Vamos agora usar isso p/ achar as relações de comutação p/ J_K:

• Sei que $R_x(\varepsilon) R_y(\varepsilon) - R_y(\varepsilon) R_x(\varepsilon) = R_z(\varepsilon^2) - 1$. A relação equivalente p/ D's é:

$$\left(1 - \frac{i J_x \varepsilon}{\hbar} - \frac{J_x^2 \varepsilon^2}{2\hbar^2}\right)\left(1 - \frac{i J_y \varepsilon}{\hbar} - \frac{J_y^2 \varepsilon^2}{2\hbar^2}\right)$$

$$- \left(1 - \frac{i J_y \varepsilon}{\hbar} - \frac{J_y^2 \varepsilon^2}{2\hbar^2}\right)\left(1 - \frac{i J_x \varepsilon}{\hbar} - \frac{J_x^2 \varepsilon^2}{2\hbar^2}\right) = 1 - \frac{i J_z \varepsilon^2}{\hbar} - 1$$

• Igualando os termos de ordem ε^2 nos 2 lados da equação obtemos

$$\boxed{[J_x, J_y] = i\hbar J_z}$$

• Repetindo o argumento p/ outras rotações $\boxed{[J_i, J_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} J_k}$

= relações de comutação fundamentais p/ o momento angular.

• Só usamos que
$\begin{cases} \text{① } J_K \text{ é o gerador de rotações em torno do eixo } K. \\ \text{② Rotações em torno de eixos diferentes não comutam.} \end{cases}$

Rotações do spin $\frac{1}{2}$

- Já encontramos os operadores que representam S_x, S_y e S_z de spin $\frac{1}{2}$:

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right)$$

$$S_y = i\frac{\hbar}{2}\left(-|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right)$$

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\left(|+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-|\right)$$

Na base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ de S_z:

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

- Vamos rodar $|\alpha\rangle$ por âng. ϕ em torno do eixo z:

$$|\alpha\rangle_R = \underbrace{\exp\left(\frac{-iS_z\phi}{\hbar}\right)}_{D_z(\phi)} |\alpha\rangle$$

- Verificando o efeito sobre $\langle S_x \rangle$:

$$\langle S_x \rangle \to {}_R\langle\alpha|S_x|\alpha\rangle_R = \langle\alpha|\underbrace{D_z^\dagger(\phi)\, S_x\, D_z(\phi)}|\alpha\rangle$$

$$\boxed{\exp\left(\frac{iS_z\phi}{\hbar}\right) S_x \exp\left(\frac{-iS_z\phi}{\hbar}\right)} \Rightarrow \text{Vamos calcular de 2 formas}$$

(I) $$\frac{\hbar}{2}\exp\left(\frac{iS_z\phi}{\hbar}\right)\left(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right)\exp\left(\frac{-iS_z\phi}{\hbar}\right)$$

Note: $S_z|+\rangle = \frac{\hbar}{2}|+\rangle \Rightarrow e^{\frac{iS_z\phi}{\hbar}}|+\rangle = \left(1 + \frac{iS_z\phi}{\hbar} + \frac{i^2 S_z^2\phi^2}{\hbar^2} + \dots\right)|+\rangle$

$$= \left(1 + \frac{i\phi}{\hbar}\frac{\hbar}{2} + \frac{i^2\phi^2}{\hbar^2}\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 + \dots\right)|+\rangle$$

$$= \left(1 + \frac{i\phi}{2} + \left(\frac{i\phi}{2}\right)^2 + \dots\right)|+\rangle = e^{\frac{i\phi}{2}}|+\rangle$$

Similarmente: $\langle-|e^{\frac{-iS_z\phi}{\hbar}} = \langle-|e^{\frac{i\phi}{2}}$

$$\Rightarrow = \frac{\hbar}{2}\left(e^{\frac{i\phi}{2}}|+\rangle\langle-|e^{\frac{i\phi}{2}} + e^{-\frac{i\phi}{2}}|-\rangle\langle+|e^{\frac{-i\phi}{2}}\right) =$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left[\left(|+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+|\right)\cos\phi + i\left(|+\rangle\langle-| - |-\rangle\langle+|\right)\operatorname{sen}\phi\right]$$

$$= S_x\cos\phi - S_y\operatorname{sen}\phi$$

II) Uso Baker-Hausdorff: (G Hermitiano, λ real)

$$\exp(iG\lambda)A\exp(-iG\lambda) = A + i\lambda[G,A] + \frac{i^2\lambda^2}{2!}[G,[G,A]] + \dots + \frac{i^n\lambda^n}{n!}[G,[G,[G,\dots[G,A]]]]$$

$$e^{\frac{iS_z\phi}{\hbar}} S_x e^{-\frac{iS_z\phi}{\hbar}} = S_x + \frac{i\phi}{\hbar}\underbrace{[S_z,S_x]}_{i\hbar S_y} + \frac{1}{2!}\left(\frac{i\phi}{\hbar}\right)^2 \underbrace{[S_z,\underbrace{[S_z,S_x]}_{i\hbar S_y}]}_{\hbar^2 S_x} +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(\frac{i\phi}{\hbar}\right)^3 \underbrace{[S_z,\underbrace{[S_z[S_z,S_x]]}_{\hbar^2 S_x}]}_{i\hbar^3 S_y} + \dots$$

$$= S_x\left[1 - \frac{\phi^2}{2!} + \dots\right] - S_y\left[\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \dots\right] = \underline{S_x\cos\phi - S_y\,\mathrm{sen}\,\phi}$$

Note que o método II não usa a representação explícita de S_i, só as relações de comutação, logo pode ser usado em sist. com momento angular $> \frac{1}{2}$.

- Temos então: $\langle S_x\rangle \to {}_R\langle\alpha|S_x|\alpha\rangle_R = \langle S_x\rangle\cos\phi - \langle S_y\rangle\,\mathrm{sen}\,\phi$

De forma similar: $\langle S_y\rangle \longrightarrow \langle S_y\rangle\cos\phi + \langle S_x\rangle\,\mathrm{sen}\,\phi$

$$\langle S_z\rangle \to \langle S_z\rangle \quad (\text{pois } [S_z, D_z(\phi)] = 0).$$

$\Rightarrow$ os valores esperados são rodados de ϕ em torno de $\hat{z}$, como esperado.

- De maneira mais geral, op. de momento angular (p/ qq. $\mathcal{H}$) satisfazem:

$$\langle J_k\rangle \to \sum_l R_{kl}\langle J_l\rangle$$

matriz de rotação

- Vamos agora examinar o efeito de rotação no eixo z sobre estado arbitrário de spin $\frac{1}{2}$: $|\alpha\rangle = |+\rangle\langle+|\alpha\rangle + |-\rangle\langle-|\alpha\rangle$

$$e^{\frac{-iS_z\phi}{\hbar}}|\alpha\rangle = e^{-\frac{i\phi}{2}}|+\rangle\langle+|\alpha\rangle + e^{\frac{i\phi}{2}}|-\rangle\langle-|\alpha\rangle$$

- Se fizermos rotação de $\underline{2\pi}$: $|\alpha\rangle \to -|\alpha\rangle$!

4π: $|\alpha\rangle \to |\alpha\rangle$ de novo.

Esse efeito estranho tem consequências observáveis.

Precessão de spin $\frac{1}{2}$ como rotação

- Campo $\vec{B} = B\hat{z}$. $H = -\frac{e}{m_e c}\vec{S}\cdot\vec{B} = \omega S_z$ com $\omega \equiv \frac{|e|B}{m_e c}$

- O operador de evolução temporal é: $U(t,0) = \exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right) = \exp\left(-\frac{iS_z\omega t}{\hbar}\right)$

ou seja, é $\underline{\text{igual}}$ ao op de rotação em torno de $\hat{z}$ por ângulo $\phi = \omega t$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle S_x\rangle_t = \langle S_x\rangle_{t=0}\cos\omega t - \langle S_y\rangle_{t=0}\,\mathrm{sen}\,\omega t \\ \langle S_y\rangle_t = \langle S_y\rangle_{t=0}\cos\omega t + \langle S_x\rangle_{t=0}\,\mathrm{sen}\,\omega t \\ \langle S_z\rangle_t = \langle S_z\rangle_0 \end{cases}$$

Depois de $t = \frac{2\pi}{\omega}$, o spin dá 1 volta

$t = \frac{4\pi}{\omega}$, o spin volta ao estado inicial.

- Experimentos que observam esse efeito foram feitos (1975 - RAUCH et al, Werner et al.)

[Feixe de nêutrons é dividido, um sub-feixe precessiona e outro não, a diferença de fase resulta em interferência quando feixes são recombinados.]

Autovalores e auto-estados de momento angular

• Tudo que fizemos se baseia nas relações de comutação de J_K:

$$[J_i, J_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} J_k$$

• Começo definindo o op. de momento angular total ao quadrado J^2:

$$J^2 \equiv J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$$

– Propriedade de J^2: $\boxed{[J^2, J_k] = 0}$

Vamos olhar p/ $[J^2, J_z] = [J_xJ_x + J_yJ_y + J_zJ_z, J_z]$

$$= J_x\underbrace{[J_x, J_z]}_{-i\hbar J_y} + \underbrace{[J_x, J_z]}_{-i\hbar J_y} J_x + J_y\underbrace{[J_y, J_z]}_{i\hbar J_x} + \underbrace{[J_y, J_z]}_{+i\hbar J_x} J_y = 0$$

e similarmente p/ os outros componentes

• Como os componentes J_K não comutam entre si, precisamos escolher um deles p/ formar base junto com J^2 $\Rightarrow$ por convenção, $\underline{J_z}$.

Operadores-escada

$$J^2|a,b\rangle = a|a,b\rangle$$
$$J_z|a,b\rangle = b|a,b\rangle$$

• Para encontrar a, b, é conveniente definir os operadores escada

$$\boxed{J_\pm = J_x \pm i J_y}$$

É fácil mostrar que

$$\begin{cases} [J_+, J_-] = 2\hbar J_z \\ [J_z, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm \\ [J^2, J_\pm] = 0 \end{cases}$$

- Por quê chamamos de operadores-escada?

$$J_z(J_\pm|a,b\rangle) = ([J_z,J_\pm] + J_\pm J_z)|a,b\rangle = (b\pm\hbar)(J_\pm|a,b\rangle)$$

$\Rightarrow$ $J_\pm|a,b\rangle$ é auto-est. de J_z com autovalor $b\pm\hbar$.

$$J^2(J_\pm|a,b\rangle) = J_\pm J^2|a,b\rangle = a(J_\pm|a,b\rangle)$$

$\Rightarrow$ $J_\pm$ não muda a.

Autovalores de J_z e J^2

- J_+ sobe o autovalor de J_z (b) sem mudar autovalor de J^2 (a). O processo não pode ser repetido indefinidamente, pois $a \geq b^2$, como vamos provar.

Note que $J^2 - J_z^2 = J_xJ_x + J_yJ_y = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+)$

$$= \frac{1}{2}(J_+J_+^\dagger + J_+^\dagger J_+)$$

$$\underbrace{\langle ab|J^2 - J_z^2|ab\rangle}_{= a - b^2} \geq 0$$

$$= a - b^2 \geq 0 \Rightarrow a \geq b^2$$

- Com a fixo, devo ter valor máximo p/ $b(=b_{max})$ tal que

$$J_+|a,b_{max}\rangle = 0$$

A rigor, isto deve ser provado; veja Cohen-Tannoudji cap VI-2

Também vale: $J_-J_+|a,b_{max}\rangle = 0$

mas $J_-J_+ = \underbrace{J_x^2 + J_y^2}_{} - i(J_yJ_x - J_xJ_y)$

$$= (J^2 - J_z^2) - \hbar J_z$$

$\Rightarrow (J^2 - J_z^2 - \hbar J_z)\underbrace{|a\,b_{max}\rangle}_{\text{Não é ket nulo.}} = 0 \quad \Rightarrow a - b_{max}^2 - b_{max}\hbar = 0$

$$\Rightarrow a = b_{max}(b_{max} + \hbar)$$

- De forma similar, também deve haver b_{min} tal que

$$J_-|a, b_{min}\rangle = 0$$

Escrevo $J_+J_- = J^2 - J_z^2 + \hbar J_z$ e concluo que

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} a &= b_{min}(b_{min} - \hbar) \\ a &= b_{max}(b_{max} + \hbar) \end{aligned}\right\} \Rightarrow b_{max} = -b_{min} \Rightarrow -b_{max} \leq b \leq b_{max}$$

- Como cada "degrau" é de $\hbar$, $b_{max} = b_{min} + n\hbar$ (para algum inteiro n)

$$\Rightarrow b_{max} = \frac{n\hbar}{2}$$

- <u>Defino</u> $j \equiv \dfrac{b_{max}}{\hbar} \Rightarrow j = \dfrac{n}{2}$

- Valor máx. do autovalor de J_z é $j\hbar$ (com j inteiro ou semi-inteiro)

- Como $a = b_{max}(b_{max} + \hbar) \Rightarrow a = \hbar^2 j(j+1)$

- <u>Defino</u> <u>m</u> tal que $b \equiv m\hbar$. Se $\begin{cases} j \text{ é inteiro, todos os } m \text{ tb são} \\ \text{semi-int.,} \qquad \text{"} \end{cases}$.

$$\Rightarrow m \in \{\underbrace{-j, -j+1, \dots, j-1, j}_{2j+1 \text{ valores}}\}$$

- Ao invés de usar $|a, b\rangle$, uso $|j, m\rangle$:

$$\begin{cases} J^2|jm\rangle = j(j+1)\hbar^2|jm\rangle \\ J_z|jm\rangle = m\hbar|jm\rangle \end{cases} \quad \text{com} \begin{cases} j \text{ inteiro ou semi-inteiro} \\ m \in \{-j, -j+1, \dots, j-1, j\} \end{cases}$$

Elementos de matriz

$$\begin{cases} J^2|jm\rangle = j(j+1)\hbar^2|jm\rangle \\ J_z|jm\rangle = m\hbar|jm\rangle \end{cases}$$

J^2:

$$\boxed{\langle j'm'|J^2|jm\rangle = j(j+1)\hbar^2\delta_{j'j}\delta_{m'm}}$$

J_z:

$$\boxed{\langle j'm'|J_z|jm\rangle = m\hbar\delta_{j'j}\delta_{m'm}}$$

$J_\pm$: $\langle jm|J_+^\dagger J_+|jm\rangle = \langle jm|J^2 - J_z^2 - \hbar J_z|jm\rangle$

$$= \hbar^2\left(j(j+1) - m^2 - m\right)$$

Sei que $J_+|jm\rangle = \underbrace{C_{jm}^+}_{=\text{CTE}}|j, m+1\rangle$ COMPARO:

$$\Rightarrow |C_{jm}^+|^2 = \hbar^2\left[j(j+1) - m(m+1)\right] = \hbar^2(j-m)(j+m+1)$$

CONVENÇÃO: C_{jm}^+ real, > 0.

$$\Rightarrow \boxed{J_+|jm\rangle = \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\,\hbar\,|j, m+1\rangle}$$

∘ De forma similar:

$$\boxed{J_-|jm\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\,\hbar\,|j, m-1\rangle}$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle j'm'|J_\pm|jm\rangle = \sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,\hbar\,\delta_{j'j}\delta_{m', m\pm 1}}$$

Representação do op. de rotação

- Vimos que $D_{\hat{n}}(\phi) = \exp\left(-i\frac{\vec{J}\cdot\hat{n}\,\phi}{\hbar}\right)$ é o operador de rotação de ϕ em torno do eixo $\hat{n}$. $\vec{J}$ é o op. de momento angular. Tanto $\vec{J}$ como $D_{\hat{n}}(\phi)$ são definidos para qualquer espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.

- Nossa tarefa agora é encontrar a representação matricial explícita para $\vec{J}$ e $\vec{D}_{\hat{n}}(\phi)$, usando uma base conveniente para $\mathcal{H}$.

- Base conveniente: $\{|j,m\rangle\}$

  - Elementos de matriz:

$$D^{(j)}_{m'm}(R) = \langle j\, m' | \exp\left(-\frac{i\vec{J}\cdot\hat{n}\phi}{\hbar}\right) | j\, m\rangle$$

- Repare que os elementos entre $\langle j' m' |$ e $| j\, m' \rangle$ são iguais a zero se $j' \neq j$.

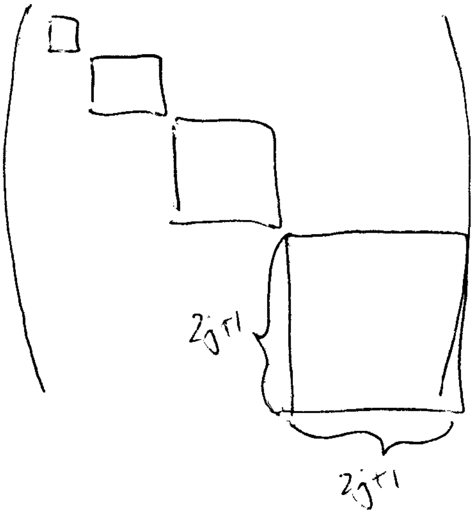
Isso acontece pois $J^2\left(D(R)|j\,m\rangle\right) = D(R)\, J^2\, |j\,m\rangle$ (pois J^2 comuta c/ J_K)

$$= j(j+1)\hbar^2\left(D(R)|j\,m\rangle\right)$$

$\Rightarrow$ Rotação não muda autovalor de J^2.

- Podemos trabalhar com $\mathcal{H}$ consistindo de 2 (ou mais) subsistemas, e dinâmica capaz de mudar j de cada subsistema. Nesse caso, usando uma base arbitrária teremos uma representação p/ $D(R)$ em geral complicada. A situação é simplificada se escolhermos a base $|j\,m\rangle$ do sistema composto.

Nesse caso uma rotação geral será escrita como uma matriz diagonal por blocos:



Na literatura, cada bloco $(2j+1)\times(2j+1)$ é chamado de <u>representação irredutível</u> do op. de rotação $D(R)$.

IRRedutível: cada bloco não pode ser reescrito como subblocos menores com outra escolha de base.

- As matrizes de rotação (com j fixo) formam um grupo.
    - Identidade $= \mathbb{1}$ (não rodar)
    - Inverso = inverter $\phi \to -\phi$ (com mesmo eixo $\hat{n}$)
    - Fechado (composição de rotações)
- A matriz $D(R)$ é unitária: $D_{m'm}(R^{-1}) = D^*_{mm'}(R)$.

Veja: $\langle jm'|\exp\left(-\frac{i\vec{J}\cdot\hat{n}\phi}{\hbar}\right)|jm\rangle \xrightarrow{\phi\to-\phi} \langle jm'|\exp\left(+\frac{i\vec{J}\cdot\hat{n}\phi}{\hbar}\right)|jm\rangle = D_{m'm}(R^{-1})$

$$= \langle jm|\exp\left(-\frac{i\vec{J}\cdot\hat{n}\phi}{\hbar}\right)|jm'\rangle^* = D^*_{mm'}(R)$$

- A matriz de rotação nos ajuda a resolver problemas físicos. Imagine começar com estado $|jm\rangle$, e agora rodá-lo:

$|jm\rangle \to D(R)|jm\rangle$ $\leftarrow$ vimos que j não muda, mas os valores de m podem mudar. Como calcular as amplitudes de probabilidade dos resultados possíveis?

• Expando o resultado na base $\{|jm\rangle\}$:

$$\underset{\mathbb{1}}{D(R)}|jm\rangle = \sum_{m'} |jm'\rangle\langle jm'|D(R)|jm\rangle = \sum_{m'} |jm'\rangle D^{(j)}_{m'm}(R)$$

$\Rightarrow$ o elemento de matriz $D^{(j)}_{m'm}(R)$ é a amplitude de probabilidade de medirmos $|j,m'\rangle$ depois de rodarmos (partindo de $|jm\rangle$).

<u>Calculando D(R) gerais</u>

• Da mecânica clássica, sabemos que qualquer rotação pode ser decomposta em seq. de 3 rotações (pelos <u>ângulos de Euler</u>):

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)$$

• Então a matriz de rotação mais geral será:

$$D^{(j)}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = \langle jm'|\exp\left(-\frac{iJ_z\alpha}{\hbar}\right)\exp\left(-\frac{iJ_y\beta}{\hbar}\right)\exp\left(-\frac{iJ_z\gamma}{\hbar}\right)|jm\rangle$$

$$= e^{-i(m'\alpha+m\gamma)}\underbrace{\langle jm'|\exp\left(-\frac{iJ_y\beta}{\hbar}\right)|jm\rangle}_{\text{única parte que "mistura" m's diferentes}}$$

$$\equiv D^{(j)}_{m'm}(\beta)$$

$\boxed{\text{• SPIN } 1/2}$ $S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y$

$$\exp\left(-\frac{i\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\beta}{2}\right) = \left[1 - \frac{(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})^2}{2!}\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \frac{(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})^4}{4!}\left(\frac{\beta}{2}\right)^4 - \dots\right]$$

$$- i\left[(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})\left(\frac{\beta}{2}\right) - \frac{(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})^3}{3!}\left(\frac{\beta}{2}\right)^3 + \dots\right]$$

mas $(\vec{\sigma}\cdot\hat{n})^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ par} \\ \vec{\sigma}\cdot\hat{n} & \text{se } n \text{ ímpar}\end{cases}$

$$= \mathbb{1}\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) - i\,\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \exp\left(-\frac{i\sigma_y\beta}{2}\right) = \begin{pmatrix}\cos\frac{\beta}{2} & -\mathrm{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ \mathrm{sen}\left(\frac{\beta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\end{pmatrix} \qquad \left[\text{pois } \sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\right]$$

- $\boxed{j=1}$

- A primeira coisa de que precisamos é a representação 3×3 de J_y.

$$J_\pm = J_x + i J_y \Rightarrow J_y = \frac{(J_+ - J_-)}{2i}$$

- Conhecemos os elementos de matriz de $J_\pm$:

$$\langle j' m' | J_\pm | j m \rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\, \hbar\, \delta_{j'j}\, \delta_{m',m\pm 1}$$

$\Rightarrow$ conheço os elementos de matriz de J_y:

$$J_y^{(j=1)} = \left(\frac{\hbar}{2}\right) \cdot \begin{array}{c|l} \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2}i & 0 \\ \sqrt{2}i & 0 & -\sqrt{2}i \\ 0 & \sqrt{2}i & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} m'=1 \\ m'=0 \\ m'=-1 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} m=1 & m=0 & m=-1 \end{array} & \end{array}$$

- Agora precisamos da expansão em série de $\exp\left(-\frac{iJ_y\beta}{\hbar}\right)$.

- $\left(J_y^{(j=1)}\right)^2 \neq \mathbb{1}$, cuidado! Mas é fácil de verificar que

$$\left(\frac{J_y^{(j=1)}}{\hbar}\right)^3 = \frac{J_y^{(j=1)}}{\hbar}$$

- Usando isso, podemos mostrar que

$$\exp\left(-\frac{iJ_y\beta}{\hbar}\right) = 1 - \left(\frac{J_y}{\hbar}\right)^2 (1-\cos\beta) - i\left(\frac{J_y}{\hbar}\right)\operatorname{sen}\beta$$

[só é válido p/ $j=1$!]

- Explicitamente:

$$d^{(1)}(\beta) = \begin{pmatrix} \frac{(1+\cos\beta)}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\beta & \frac{1-\cos\beta}{2} \\ \frac{\operatorname{sen}\beta}{\sqrt{2}} & \cos\beta & -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\beta \\ \frac{1-\cos\beta}{2} & \frac{\operatorname{sen}\beta}{\sqrt{2}} & \frac{1+\cos\beta}{2} \end{pmatrix}$$

Momento angular orbital

- Se não temos spin, uma partícula ainda pode ter momento angular orbital

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$$

- Primeiramente, vamos verificar que $\vec{L}$ acima satisfaz as relações de comutação fundamentais do momento angular:

$$[L_x, L_y] = [y p_z - z p_y, z p_x - x p_z] = [y p_z, z p_x] + [z p_y, x p_z]$$
$$= y p_x [p_z, z] + p_y x [z, p_z]$$
$$= i\hbar (x p_y - y p_x) = i\hbar L_z$$

e de forma similar p/ os outros componentes, mostramos que

$$[L_i, L_j] = i \varepsilon_{ijk} \hbar L_k \quad //$$

- Agora vamos ver se $1 - i\left(\frac{\delta\phi}{\hbar}\right) L_z = 1 - i\left(\frac{\delta\phi}{\hbar}\right)(x p_y - y p_x)$ corresponde a uma rotação infinitesimal em torno do eixo z:

$$\left[1 - i\left(\frac{\delta\phi}{\hbar}\right)L_z\right]|x', y', z'\rangle = \left[1 - i\left(\frac{p_y}{\hbar}\right)(\delta\phi\, x') + i\left(\frac{p_x}{\hbar}\right)(\delta\phi\, y')\right]|x', y', z'\rangle$$

usamos que p_j é gerador de translação

$$= |x' - y'\delta\phi, y' + x'\delta\phi, z'\rangle$$

é o que esperamos de rotação infinit. em torno de $\hat{z}$?

$$\begin{pmatrix} 1 & -\delta\phi \\ \delta\phi & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \delta\phi\, y \\ \delta\phi\, x + y \end{pmatrix} \leftarrow \text{SIM.}$$

$\Rightarrow$ como $\vec{p}$ gera translações, $\vec{L}$ gera rotação.

- Considere função de onda de partícula sem spin: $\langle x', y', z' | \alpha \rangle$. Após rotação infinitesimal em torno de $\hat{z}$, temos:

$$\langle x' y' z' | \alpha \rangle \rightarrow \langle x', y', z' | \left[1 - i\left(\frac{\delta\phi}{\hbar}\right) L_z\right] | \alpha \rangle$$

$$= \langle x' + y'\delta\phi,\ y' - x'\delta\phi,\ z' | \alpha \rangle \quad \text{(I)}$$

[Repare na diferença no sinal por estarmos aplicando rotação no bra.]

- A mesma rotação fica mais transparente em coord. esféricas:

$$\langle r, \theta, \phi | \alpha \rangle \rightarrow \langle r, \theta, \phi | \left[1 - i\left(\frac{\delta\phi}{\hbar}\right) L_z\right] | \alpha \rangle \quad \text{(II)}$$

$$= \langle r, \theta, \phi - \delta\phi | \alpha \rangle$$

[vendo (I) acima, coord. mudam com rotação de $-\delta\phi$.]

$$= \langle r, \theta, \phi | \alpha \rangle - \delta\phi \frac{\partial}{\partial\phi} \langle r, \theta, \phi | \alpha \rangle \quad \text{(III)}$$

- Comparando II e III acima: $\boxed{\langle \vec{x}' | L_z | \alpha \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\phi} \langle \vec{x}' | \alpha \rangle}$

- Vamos considerar rotação de $\delta\phi_x$ em torno do eixo $\hat{x}$:

$$\langle x', y', z' | \left[1 - i\left(\frac{\delta\phi_x}{\hbar}\right) L_x\right] | \alpha \rangle = \langle x',\ y' + z'\delta\phi_x,\ z' - y'\delta\phi_x | \alpha \rangle$$

Escrevendo x', y', z' em coord. esféricas, pode-se mostrar que

$$\langle \vec{x}' | L_x | \alpha \rangle = -i\hbar \left(-\sin\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta \cos\phi \frac{\partial}{\partial\phi}\right) \langle \vec{x}' | \alpha \rangle \quad \text{e}$$

$$\langle \vec{x}' | L_y | \alpha \rangle = -i\hbar \left(\cos\phi \frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta \sin\phi \frac{\partial}{\partial\phi}\right) \langle \vec{x}' | \alpha \rangle$$

e como $J_\pm = J_x \pm i J_y$: $\Rightarrow \boxed{\langle \vec{x}' | L_\pm | \alpha \rangle = -i\hbar e^{\pm i\phi} \left(\pm i \frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta \frac{\partial}{\partial\phi}\right) \langle \vec{x}' | \alpha \rangle}$

- Também temos que $L^2 = L_z^2 + \frac{1}{2}(L_+ L_- + L_- L_+)$

$$\Rightarrow \boxed{\langle \vec{x}' | L^2 | \alpha \rangle = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right] \langle \vec{x}' | \alpha \rangle}$$

↑ Parece parte angular de ∇^2 em coord. esféricas. Por quê?
Veja Sakurai, p. 197/198.

Harmônicos esféricos

- Considere partícula sem spin em potencial esfericamente simétrico. A eq. de onda é separável em coord. esféricas, e as autofunções de energia podem ser escritas:

$$\langle \vec{x}' | n, l, m \rangle = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta, \phi)$$

, onde n são outros números quânticos diferentes de l (L^2) e m (L_z).

- A simetria esférica garante que

$[H, L^2] = [H, L_z] = 0 \Rightarrow$ auto-est. de energia são também auto-estados de L^2 e L_z.

- A parte angular da função de onda é comum a todos os problemas com simetria esférica, por isso vamos estudá-la:

$$\langle \hat{n} | l, m \rangle = Y_l^m(\theta, \phi) = Y_l^m(\hat{n})$$

onde $\hat{n}$ é o vetor unitário na direção especificada por θ, ϕ.

- $Y_l^m(\theta,\phi)$ é a amplitude associada à probabilidade de encontrarmos a partícula na direção θ, ϕ — ela será modulada pela função radial $R_{nl}(r)$, que dependerá do problema $[V(r)]$.

- Relações envolvendo auto-estados de $\{L^2, L_z\}$ podem ser reescritas como relações envolvendo os harmônicos esféricos. Por exemplo:

$L_z | l m \rangle = m\hbar | l m \rangle$ $\left[\cdot \langle \hat{n} | \text{ e usando } \langle \vec{x}' | L_z | \alpha \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \langle \vec{x}' | \alpha \rangle \right]$

$$\Rightarrow \langle \hat{n} | L_z | l m \rangle = m\hbar \langle \hat{n} | l m \rangle \Rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \underbrace{\langle \hat{n} | l m \rangle}_{Y_l^m(\theta,\phi)} = m\hbar \underbrace{\langle \hat{n} | l m \rangle}_{Y_l^m(\theta,\phi)}$$

$\Rightarrow$ a dependência com ϕ de $Y_l^m(\theta,\phi) \sim e^{im\phi}$.

- Outra eq. satisfeita pelos $Y_\ell^m(\theta\phi)$:

$$\langle \hat{n}|L^2|\ell m\rangle = \langle\hat{n}|\ell(\ell+1)\hbar^2|\ell m\rangle \Rightarrow \left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+\ell(\ell+1)\right]Y_\ell^m=0$$

que é a eq. diferencial satisfeita pelos $Y_\ell^m(\theta,\phi)$.

- A ortogonalidade dos auto-estados $\langle \ell' m'|\ell m\rangle = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}$ nos dá: $\mathbb{1} = \int d\Omega_{\hat{n}}\, |\hat{n}\rangle\langle\hat{n}|$

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\left(Y_{\ell'}^{m'}(\theta\phi)\right)^* Y_\ell^m(\theta,\phi) = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'} \quad \text{(I)}$$

- Uma forma de obter os Y_ℓ^m é começar com $m=\ell$: $\langle\hat{n}|L_+|\ell,\ell\rangle=0$

$$\Rightarrow -i\hbar e^{i\phi}\left[i\frac{\partial}{\partial\theta}-\operatorname{cotg}\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right]\langle\hat{n}|\ell,\ell\rangle=0$$

como a dependência com ϕ é $e^{i\ell\phi}$, é fácil ver que a eq. é satisfeita por

$$\langle\hat{n}|\ell,\ell\rangle = Y_\ell^\ell(\theta\phi) = c_\ell e^{i\ell\phi}(\operatorname{sen}\theta)^\ell \quad \text{com}$$

$$c_\ell = \left[\frac{(-1)^\ell}{2^\ell \ell!}\right]\sqrt{\frac{(2\ell+1)(2\ell)!}{4\pi}} \leftarrow \text{determinada pela normalização (I) acima.}$$

- Partindo de Y_ℓ^ℓ podemos encontrar Y_ℓ^{m-1} aplicando o op. L_- a Y_ℓ^ℓ, e assim sucessivamente. A derivação é tediosa e se encontra em livros-texto elementares. O resultado p/ $m\geq 0$ é:

$$Y_\ell^m(\theta,\phi) = \frac{(-1)^\ell}{2^\ell \ell!}\sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell+m)!}{4\pi(\ell-m)!}}\, e^{im\phi}\frac{1}{\operatorname{sen}^m\theta}\frac{d^{\ell-m}}{d(\cos\theta)^{\ell-m}}(\operatorname{sen}\theta)^{2\ell}$$

e $Y_\ell^{-m}(\theta,\phi) = (-1)^m\left[Y_\ell^m(\theta\phi)\right]^*$

- A dependência com θ de $Y_\ell^m(\theta,\phi)$ é $(\operatorname{sen}\theta)^{|m|}\cdot\left[\text{polinômio de } \cos\theta \text{ de grau } \ell-|m|\right]$

- Para $m=0 \Rightarrow Y_\ell^0(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}\, P_\ell(\cos\theta) \rightarrow$ polinômios de Legendre.

- Por quê l não pode ser semi-inteiro?
  - A função de onda ganharia uma fase de -1 depois de rotação de 2π:

$$e^{im(2\pi)} = -1$$

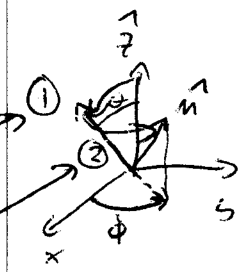
← qual seria a fç. correta, $\psi(x)$ ou $-\psi(x)$?

⇒ 2 valores ⇒ causa problemas.

  - Outra razão: pode-se mostrar que a eq. diferencial p/ $Y_l^m(\theta,\phi)$ tem um conj. <u>completo</u> de soluções p/ l inteiro. ⇒ os valores semi-inteiros não desnecessários.

Harmônicos esféricos como matrizes de rotação

- Queremos achar $D(R)$ tal que $|\hat{n}\rangle = D(R)|\hat{z}\rangle$
- Basta rodar $|\hat{z}\rangle$ em torno do eixo y por âng. θ ①
  e em torno do eixo z por ângulo ϕ ②



$$\Rightarrow D(R) = R_z(\phi)\, R_y(\theta)$$

- Escrevo $|\hat{n}\rangle = D(R) \underset{\mathbb{1}}{\wedge} |\hat{z}\rangle = \sum_l \sum_m D(R)|l m\rangle\langle l m|\hat{z}\rangle$ $[\cdot\langle l, m'|]$

$$\Rightarrow \langle l,m'|\hat{n}\rangle = \sum_m D^{(l)}_{m'm}(\alpha=\phi, \beta=\theta)\, \langle l,m|\hat{z}\rangle$$

$\langle l,m|\hat{z}\rangle = Y_l^{m*}(\theta=0,\phi)\,\delta_{m0}$ [propriedade dos Y_l^m: $Y_l^m(\theta=0)=0$ se $m\neq 0$]

$$= \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}}\, P_l(\cos\theta)\Big|_{\cos\theta=1} \delta_{m0} = \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}}\,\delta_{m0}$$

uso ali...

$$Y_\ell^{m*}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi}}\, D_{m0}^{(\ell)}(\alpha=\phi, \beta=\theta)$$

$$\Longleftrightarrow\quad D_{m0}^{(\ell)}(\alpha,\beta,\gamma=0) = \sqrt{\frac{4\pi}{(2\ell+1)}}\, Y_\ell^{m*}(\theta,\phi)\Big|_{\theta=\beta,\,\phi=\alpha}$$

- As matrizes de rotação são relacionadas aos harmônicos esféricos assim.

Adição de momento angular

- Na física clássica, se queremos somar 2 grandezas com dimensão de momento angular, basta fazer a soma vetorial.
- Na MQ temos que aprender a construir os novos operadores $\vec{J}$ do sistema composto, e aprender sobre a relação entre as propriedades do sist. composto e de cada sub-sistema. Para isso, será muito útil o conceito de <u>mudança de base</u>, que estudamos no início do curso.

2 Exemplos simples

A - Partícula de spin $\frac{1}{2}$ e posição/momento

- Base: produto tensorial de ket em $\mathcal{H}$ de dimensão infinita $\{|\vec{x}'\rangle\}$ com ket em $\mathcal{H}$ de 2 dimensões $\{|+\rangle, |-\rangle\}$.

$$\Rightarrow |\vec{x}', \pm\rangle = |\vec{x}'\rangle \otimes |\pm\rangle$$

- Qualquer operador que age só em $\{|\vec{x}'\rangle\}$ <u>comuta</u> com operadores de spin $\{|\pm\rangle\}$
- Rotações: $\exp\left(-i\frac{\vec{J}\cdot\hat{n}\phi}{\hbar}\right)$ com $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$
$= \vec{L}\otimes\mathbb{1} + \mathbb{1}\otimes\vec{S}$

como $[\vec{L}, \vec{S}] = 0 \Rightarrow D(R) = \exp\left(-\frac{i\vec{L}\cdot\hat{n}\phi}{\hbar}\right) \otimes \exp\left(-\frac{i\vec{S}\cdot\hat{n}\phi}{\hbar}\right)$

- A função de onda tem 2 componentes:

$\langle\vec{x}', \pm|\alpha\rangle = \psi_\pm(\vec{x}')$, muitas vezes organizados em vetor-coluna

$$\begin{pmatrix} \psi_+(\vec{x}') \\ \psi_-(\vec{x}') \end{pmatrix}.$$

$|\psi_\pm(\vec{x}')|^2$ é a densidade de probabilidade da partícula ser medida em $\vec{x}'$ com spin $\pm$.

• Ao invés da base $\{|\vec{x}'\rangle \otimes |\pm\rangle\}$, podemos expandir na base

$\{|n\ell m\rangle \otimes |\pm\rangle\}$. Veremos que outra alternativa

será a base dos L^2 L_z S^2, S_z

operadores J^2, J_z, L^2, S^2 → momento angular total.

B - 2 partículas de spin $\frac{1}{2}$, sem levar em conta posições.

$$\vec{S} = \vec{S}_1 \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \vec{S}_2 = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$$

• Op. de spins diferentes comutam: $[\vec{S}_{1i}, \vec{S}_{2j}] = 0$

• Op. do mesmo spin têm as relações de comutação que já estudamos:

$[S_{1x}, S_{1y}] = i\hbar S_{1z}$ etc. Como consequência,

$\boxed{[S_x, S_y] = i\hbar S_z}$ onde os ops. são do spin total.

• Vamos convencionar os números quânticos dos diversos operadores:

OPERADOR		AUTOVALOR
$S^2 = (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2$	$\longleftrightarrow$	$s(s+1)\hbar^2$
$S_z = S_{1z} + S_{2z}$	$\longleftrightarrow$	$m\hbar$
S_{1z}	$\longleftrightarrow$	$m_1\hbar$
S_{2z}	$\longrightarrow$	$m_2\hbar$

• De novo, temos 2 escolhas de base:

① Representação $\{m_1, m_2\}$ em termos de auto-estados de S_{1z} e S_{2z}:

$\{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\}$ $\quad |+-\rangle = |m_1 = +\frac{1}{2}, m_2 = -\frac{1}{2}\rangle$ etc.

② Representação $\{s, m\}$ baseada nos autovetores de S^2 e S_z:

$$\{ \underbrace{|s=1, m=\pm 1, 0\rangle}_{\text{TRIPLETO DE ESTADOS}}, \underbrace{|s=0, m=0\rangle}_{\text{ESTADO SINGLETO}} \}$$

Em cada base temos 4 vetores $\Rightarrow$ a dimensão do espaço de Hilbert.

- A relação entre as bases é:

$$|s=1, m=1\rangle = |++\rangle \quad (a)$$

$$|s=1, m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle) \quad (b)$$

$$|s=1, m=-1\rangle = |--\rangle \quad (c)$$

$$|s=0, m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle) \quad (d)$$

- Obtemos (b) de (a) usando o op. escada $S_- \equiv S_{1-} + S_{2-}$

$$= (S_{1x} - i S_{1y}) + (S_{2x} - i S_{2y})$$

- lembre que S_{1-} só afeta o 1º termo de $|++\rangle$, etc.

$$S_-|s=1, m=1\rangle = (S_{1-} + S_{2-})|++\rangle$$

$$\sqrt{(1+1)(1-1+1)}\,|s=1, m=0\rangle = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}+1\right)}\,|-+\rangle + \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}+1\right)}\,|+-\rangle$$

$\Rightarrow$ (b).

- (c) é obtido de (b) de forma similar, e (d) é obtido da relação de ortogonalidade com os outros 3.

- Os coeficientes $\boxed{\text{aqui}}$ são conhecidos como coeficientes de Clebsch-Gordan — são os elementos da matriz de transformação entre as bases $\{m_1, m_2\}$ e $\{s, m\}$.

Teoria formal da adição de momento angular

- Considere 2 op. de momento angular em sub-sistemas diferentes, $\vec{J}_1$ e $\vec{J}_2$:

$$[J_{1i}, J_{1j}] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_K \quad , \quad [J_{2i}, J_{2j}] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_{2K}.$$

- Ops de sist. diferentes comutam:

$$[J_{1K}, J_{2\ell}] = 0$$

- O op de rotação infinitesimal nos 2 sist. é:

$$\left(1 - \frac{i\vec{J}_1\cdot\hat{n}\,\delta\phi}{\hbar}\right)\otimes\left(1 - \frac{i\vec{J}_2\cdot\hat{n}\,\delta\phi}{\hbar}\right) = 1 - \frac{i(\vec{J}_1\otimes 1\!\!1 + 1\!\!1\otimes\vec{J}_2)\cdot\hat{n}\,\delta\phi}{\hbar} \quad \text{(I)}$$

$$\left[+\,O(\delta\phi)^2\right]$$

- Definimos o momento angular total $\vec{J} \equiv \vec{J}_1\otimes 1\!\!1 + 1\!\!1\otimes\vec{J}_2$
$= \vec{J}_1 + \vec{J}_2$

- A versão finita da rotação acima é:

$$\boxed{D_1(R)\otimes D_2(R) = \exp\left(-\frac{i\vec{J}_1\cdot\hat{n}\,\phi}{\hbar}\right)\otimes\exp\left(-\frac{i\vec{J}_2\cdot\hat{n}\,\phi}{\hbar}\right)} \quad \text{(II)}$$

- Repare de (I) acima que $\vec{J}$ é o gerador das rotações no sist. total ⇒ deve ser momento angular. De fato, é fácil verificar que

$$[J_i, J_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}J_K$$

- Podemos descrever este sistema composto usando 2 bases diferentes:

<u>OPÇÃO A</u>: $\{|\overset{J_1^2}{j_1}, \overset{J_2^2}{j_2}; \overset{J_{1z}}{m_1}, \overset{J_{2z}}{m_2}\rangle\}$ ← todos comutam. ← "<u>base local</u>"

As equações de autovalores/vetores são:

$$J_1^2|j_1 j_2; m_1 m_2\rangle = j_1(j_1+1)\hbar^2 |j_1 j_2\, m_1 m_2\rangle$$

$$J_{1z}|j_1 j_2\, m_1 m_2\rangle = m_1\hbar\, |j_1 j_2\, m_1 m_2\rangle$$

$$J_2^2|j_1 j_2\, m_1 m_2\rangle = j_2(j_2+1)\hbar^2 |j_1 j_2\, m_1 m_2\rangle$$

$$J_{2z}|j_1 j_2\, m_1 m_2\rangle = m_2\hbar\, |j_1 j_2\, m_1 m_2\rangle$$

<u>OPÇÃO B</u>: $\{|\overset{J_1^2}{j_1}\, \overset{J_2^2}{j_2}; \overset{J^2}{j}, \overset{J_z}{m}\rangle\}$ ← todos comutam, pequenamente escrito $\{|j\, m\rangle\}$

"<u>base global</u>" (se j_1 e j_2 são conhecidos e fixos)

• $[J^2, J_{1z}] \neq 0$, $[J^2, J_{2z}] \neq 0$ ⇒ não dá para adicionar J^2 ao conjunto de op. que definem a opção A.

<u>NEM</u> para adicionar J_{1z} ou J_{2z} ao conjunto da opção B.

• Vamos considerar o unitário que leva a base A na base B:

$$\mathbb{1}\cdot|j_1 j_2; j m\rangle = \underbrace{\sum_{m_1}\sum_{m_2} |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle\langle j_1 j_2; m_1 m_2|}_{\mathbb{1} \text{ no espaço com } j_1, j_2 \text{ fixos}}\, j_1 j_2; j m\rangle$$

$$= \sum_{m_1}\sum_{m_2} \underbrace{\langle j_1 j_2; m_1 m_2 | j_1 j_2; j m\rangle}_{\text{elementos da matriz unitária de mudança de base}}\, |j_1 j_2; m_1 m_2\rangle$$

= <u>COEFICIENTES de CLEBSCH-GORDAN</u>

Propriedades dos coef. do CG:

(I) $\boxed{m = m_1 + m_2}$

Note que $(J_z - J_{1z} - J_{2z}) | j_1 j_2 ; j m \rangle = 0$ $\left[\cdot \langle j_1 j_2 ; m_1 m_2 | \right]$

$\Rightarrow (m - m_1 - m_2) \langle j_1 j_2 , m_1 m_2 | j_1 j_2 ; j m \rangle = 0$ CQD.

(II) Os coeficientes só são $\neq 0$ quando $\boxed{|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2}$ ⊛

A prova está no Apêndice B do SAKURAI. Vejamos que a contagem é consistente:

- Na base A (local), m_1 tem $2j_1+1$ valores e
  m_2 tem $2j_2+1$ valores $\Rightarrow \dim(\mathcal{H}) = (2j_1+1)(2j_2+1)$

- Na base B (global), assuma que ⊛ acima vale. Então (assumindo $j_1 \geq j_2$)

$$\dim(\mathcal{H}) = \sum_{j_1 - j_2}^{j_1 + j_2} (2j+1) = (2j_1+1)(2j_2+1)$$

$\Rightarrow$ temos o mesmo número de vetores em cada base, o que é necessário.

(III) Os coeficientes podem ser escolhidos, por convenção, como reais

[prova no complemento B_X do Cohen-Tannoudji]

- Consequência: $\langle j_1 j_2 ; j m | j_1 j_2 ; m_1 m_2 \rangle \underset{\text{(SIMÉTRICA)}}{=} \langle j_1 j_2 ; m_1 m_2 | j_1 j_2 , j m \rangle$

- Matriz unitária e real é ortogonal: $M^T M = M M^T = \mathbb{1}$ (T = transposta)

AQUI USO TAMBÉM A SIMETRIA DA MATRIZ

$$\Rightarrow \sum_j \sum_m \langle j_1 j_2 ; m_1 m_2 | j_1 j_2 ; j m \rangle \langle j_1 j_2 ; m_1' m_2' | j_1 j_2 ; j m \rangle = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}$$

$$\Rightarrow \sum_{m_1} \sum_{m_2} \langle j_1 j_2 ; m_1 m_2 | j_1 j_2 , j m \rangle \langle j_1 j_2 ; m_1 m_2 | j_1 j_2 , j' m' \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

(também podem ser vistos como consequência da ortonormalidade das bases)

Calculando coeficientes de CG (Clebsch-Gordan)

- Vamos encontrar uma relação de recursão que permitirá calcular os coeficientes de CG.

$$J_\pm |j_1 j_2, jm\rangle = (J_{1\pm} + J_{2\pm}) \underbrace{\left(\sum_{m_1} \sum_{m_2} |j_1 j_2\, m_1 m_2\rangle\langle j_1 j_2\, m_1 m_2| \right)}_{1\!\!1} |j_1 j_2, jm\rangle$$

- Uso a ação conhecida dos ops. $J_\pm$ dos dois lados da equação:

$$\begin{cases} J_+ |jm\rangle = \sqrt{(j-m)(j+m+1)}\,\hbar\,|j, m+1\rangle \\ J_- |jm\rangle = \sqrt{(j+m)(j-m+1)}\,\hbar\,|j, m-1\rangle \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(j \mp m)(j \pm m+1)}\,|j_1 j_2, j, m\pm 1\rangle$$

$$= \sum_{m_1'} \sum_{m_2'} \left(\sqrt{(j_1 \mp m_1')(j_1 \pm m_1'+1)}\,|j_1 j_2; m_1' \pm 1, m_2'\rangle + \sqrt{(j_2 \mp m_2')(j_2 \pm m_2'+1)}\,|j_1 j_2; m_1', m_2' \pm 1\rangle \right)$$

$$\cdot \langle j_1 j_2, m_1' m_2' | j_1 j_2, jm\rangle$$

- Agora multiplico por $\langle j_1 j_2 | m_1 m_2|$ (pela esquerda), e o "sanduíche" elimina todos os termos do l.d., exceto

$$m_1 = m_1' \pm 1\ ,\quad m_2 = m_2' \quad (1^\circ \text{ termo do l.d})$$

$$m_1 = m_1'\ ,\quad m_2 = m_2' \pm 1 \quad (2^\circ \text{ termo do l.d.})$$

$$\boxed{\begin{aligned} \Rightarrow & \sqrt{(j \mp m)(j \pm m+1)}\,\langle j_1 j_2, m_1 m_2 | j_1 j_2, j, m\pm 1\rangle \\ = & \sqrt{(j_1 \mp m_1+1)(j_1 \pm m_1)}\,\langle j_1 j_2; m_1 \mp 1, m_2 | j_1 j_2, jm\rangle \\ + & \sqrt{(j_2 \mp m_2+1)(j_2 \pm m_2)}\,\langle j_1 j_2, m_1, m_2 \mp 1 | j_1 j_2, jm\rangle \end{aligned}}$$

Relação de recorrência p/ coeficientes de Clebsch-Gordan.

- Com essas relações é possível calcular uma tabela de coeficientes de Clebsch-Gordan – veja o Sakurai, seção 3.7.