Observáveis compatíveis

- A, B dois observáveis. $[A,B]$ = comutador de A e B = $AB - BA$.

- Dizemos que A e B são compatíveis quando $[A,B]=0$
  incompatíveis $[A,B] \neq 0$

[Repare que $[A,B]$ é um operador].

Ex: S^2 e S_z são compatíveis; S_x e S_z são incompatíveis.

- Vamos supor que $[A,B]=0$. Qual a relação entre auto-vetores de A e B?

Teorema: Seja A, B observáveis compatíveis. Suponha que autovalores de A sejam não-degenerados. ~~Então~~ Base de auto-estados de A é $\{|\phi_j\rangle\}$.
Então B é diagonal nesta base, ou seja, $\langle\phi_j|B|\phi_i\rangle$ só é $\neq 0$ p/ $j=i$.

Prova: $\langle\phi_i|[A,B]|\phi_j\rangle$

$= \underbrace{\langle\phi_i|A}B|\phi_j\rangle - \langle\phi_i|B\underbrace{A|\phi_j\rangle}$

$= a_i\langle\phi_i|B|\phi_j\rangle - a_j\langle\phi_i|B|\phi_j\rangle = (a_i - a_j)\langle\phi_i|B|\phi_j\rangle = 0$ HIPÓTESE $[A,B]=0$.

$\Rightarrow \langle\phi_i|B|\phi_j\rangle = 0$ p/ $i \neq j$.

Por isso, podemos escrever B_{ij} como $\langle\phi_i|B|\phi_j\rangle = \delta_{ij}\langle\phi_j|B|\phi_j\rangle$

$$B = \mathbb{1}B\mathbb{1} = \sum_j\sum_i |\phi_i\rangle\underbrace{\langle\phi_i|B|\phi_j\rangle}_{\delta_{ij}B_{ii}}\langle\phi_j| = \sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|B|\phi_i\rangle\langle\phi_i|$$

Se B atua em autovet. de A:

$$B|\phi_j\rangle = \sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|B|\phi_i\rangle\underbrace{\langle\phi_i|\phi_j\rangle}_{\delta_{ij}} = \left(\langle\phi_j|B|\phi_j\rangle\right)|\phi_j\rangle$$

ou seja, $|\phi_j\rangle$ também é autovetor de B, com autovalor $b_j = \langle\phi_j|B|\phi_j\rangle$.

$\Rightarrow$ O ket $|\phi_j\rangle$ é autovetor simultâneo de A e B. Se quisermos, podemos escrevê-lo com os dois autovalores: $|\phi_j\rangle = |a_j, b_j\rangle$ só p/ lembrar disso.

- A prova foi feita p/ caso não-degenerado. No caso degenerado, temos que construir auto-vet. de B a partir de combinações lineares dos auto-vetores de A, ~~[illegible]~~ o que veremos mais adiante.

- Autovetores simultâneos de A e B:

$$A|a_i, b_i\rangle = a_i|a_i, b_i\rangle$$
$$B|a_i, b_i\rangle = b_i|a_i, b_i\rangle$$

- Se não há degenerescência, se sabemos a_i, sabemos b_i.
- A situação é + interessante quando há degenerescência.

Ex: Momento angular

Autovalores de L^2: $\{\hbar^2 l(l+1)\}$

" L_z: $\{m_l\}$ $\quad m_l \in \{-l, -l+1, \ldots, +l\}$

- P/ especificar auto-estado simultâneo de $\{L^2, L_z\}$ precisamos ~~de~~ do par $\{l, m_l\}$.

• Às vezes usamos um índice coletivo K_i

$$|K_i\rangle = |a_i, b_i\rangle$$

• Podemos generalizar p/ a situação em que temos vários observáveis que comutam:

$$[A,B]=[B,C]=[A,C]=\dots=0$$

• Se encontramos um <u>conjunto completo de observáveis que comutam</u>, cada auto-estado simultâneo é especificado univocamente pelos autovalores:

$$|K_i\rangle = |a_i, b_i, c_i, \dots\rangle \quad \text{com}$$

$$\langle K_i|K_j\rangle = \delta_{K_i,K_j} = \delta_{a_i a_j}\,\delta_{b_i b_j}\cdots$$

completeza: $$\sum_j |K_j\rangle\langle K_j| = \sum_i \sum_j \sum_k |a_i b_j c_k \cdots\rangle\langle a_i b_j c_k \cdots| = \mathbb{1}.$$

• <u>Medidas compatíveis em sequência</u>:

• Sem degenerescência:

$$|\alpha\rangle \xrightarrow{A} |a_i, b_i\rangle \xrightarrow{B} |a_i, b_i\rangle \xrightarrow{A} |a_i, b_i\rangle$$

• Suponha A degenerado:

$$|\alpha\rangle \xrightarrow{A} P_{a_i}|\alpha\rangle = \sum_{j=1}^{n} |a_i b_j\rangle\langle a_i b_j|\alpha\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\,|a_i, b_j\rangle$$

$$\xrightarrow{B} |a_i, b_k\rangle \xrightarrow{A} |a_i, b_k\rangle \text{ etc.}$$

[Seleciona 1 dos b_j do estado anterior]

Observáveis incompatíveis

• Não têm autoestados simultâneos.

Prova: Suponha que A, B têm auto-estados simultâneos e $[A,B]\neq 0$. Então

$$\left.\begin{aligned} AB|a_i b_j\rangle &= a_i b_j |a_i b_j\rangle \\ BA|a_i b_j\rangle &= a_i b_j |a_i b_j\rangle \end{aligned}\right\} \Rightarrow AB|a_i b_j\rangle = BA|a_i b_j\rangle$$

como $|a_i, b_j\rangle$ formam base, isso significa que $AB = BA$. $\Rightarrow$ ABSURDO

$\Rightarrow$ se $[A,B]\neq 0$, então A e B não têm auto-estados simultâneos.

Note que há exceção. Ex: considere sub-espaço de L^2 com $l=0$.

$|l=0, m=0\rangle$ é auto-estado de L^2, L_z
e de L^2, L_x

mesmo com $[L_x, L_z]\neq 0$. Isso pode acontecer em sub-espaço, mas não em todo o $\mathcal{H}$.

• O que acontece quando fazemos medidas sequenciais de observáveis incompatíveis?

I) Medidas seletivas A, B, C que não comutam:

. Se normalizamos o estado $|a_i\rangle$ (pós-medida A)

. $P(c_i, \text{tendo obtido } b_i) = \underbrace{|\langle c_i|b_i\rangle|^2}_{P(\text{passar na seleção } B)} \underbrace{|\langle b_i|a_i\rangle|^2}_{P(\text{passar seleção } C)}$

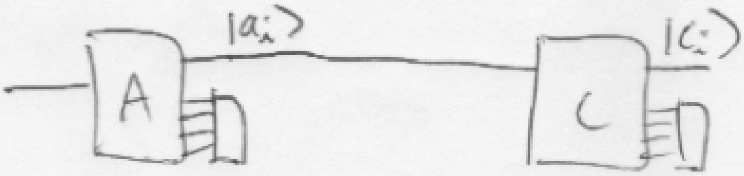
II) Somando sobre todos os resultados da medida B:

p_{II} = prob. de resultado c_i, indep. do resultado da medida intermediária B (<u>que foi feita</u>):

$$P_{II} = \sum_j |\langle c_i|b_j\rangle|^2 \, |\langle b_j|a_i\rangle|^2 = \sum_j \langle c_i|b_j\rangle\langle b_j|a_i\rangle\langle a_i|b_j\rangle\langle b_j|c_i\rangle$$

III) Sem a medida intermediária de B:

P_{III} = prob. de resultado c_i, sem <u>que tenhamos feito medida B</u>:



$P_{III} = |\langle c_i|a_i\rangle|^2$ Uso $|a_i\rangle = 1\!\!1\,|a_i\rangle$ com $1\!\!1 = \sum_j |b_j\rangle\langle b_j|$ na base de B:

$$\Rightarrow P_{III} = \Big|\langle c_i|\sum_j |b_j\rangle\langle b_j|\,|a_i\rangle\Big|^2$$

$$= \Big|\sum_j \langle c_i|b_j\rangle\langle b_j|a_i\rangle\Big|^2$$ [Note que é o <u>módulo ao quadrado da soma</u>, e não o inverso]

$$= \Big(\sum_j \langle c_i|b_j\rangle\langle b_j|a_i\rangle\Big)\Big(\sum_k \langle b_k|c_i\rangle\langle a_i|b_k\rangle\Big) = \sum_j\sum_k \langle c_i|b_j\rangle\langle b_j|a_i\rangle\langle a_i|b_k\rangle\langle b_k|c_i\rangle$$

Note que P_{II} e P_{III} são <u>diferentes</u>!

• Na exp. II, a medida de B faz com que P_{II} seja a <u>soma de</u> módulos ao quadrado de n. complexos.

probabilidades

• Na exp. III, não medimos B e P_{III} é

módulo ao quadrado de uma soma de complexos

⇒ interferência, resultado <u>diferente</u> de II.

⇒ Medir B entre A e C <u>muda</u> os resultados do experimento.

• Pode-se mostrar que $P_{II} = P_{III}$ se $[A,B]=0$ ou $[B,C]=0$.

⇒ $P_{II} \neq P_{III}$ é <u>consequência</u> da incompatibilidade dos observáveis.

$$P_{II} = \sum_j |\langle c_i|b_j\rangle|^2 |\langle b_j|a_i\rangle|^2$$

$$= \sum_j \langle c_i|b_j\rangle\langle b_j|a_i\rangle\langle a_i|b_j\rangle\langle b_j|c_i\rangle$$

$$P_{III} = \sum_j \sum_K \langle c_i|b_j\rangle\langle b_j|a_i\rangle\langle a_i|b_K\rangle\langle b_K|c_i\rangle$$

$$= \left| \sum_j \langle c_i|b_j\rangle\langle b_j|c_i\rangle \right|^2$$

Se $[A,B]=0$ e no caso sem degenerescência, temos auto-estados simultâneos de A e B:

$$A|a_i,b_i\rangle = a_i|a_i,b_i\rangle$$
$$B|a_i,b_i\rangle = b_i|a_i,b_i\rangle$$

Nesse caso $\langle b_j|a_i\rangle = \langle a_j,b_j|a_i,b_i\rangle = \delta_{ij}$

Avaliando $P_{II} = \sum_j \langle c_i|b_j\rangle \underbrace{\langle b_j|a_i\rangle}_{\delta_{ij}} \underbrace{\langle a_i|b_j\rangle}_{\delta_{ij}} \langle b_j|c_i\rangle$

$$= \langle c_i|b_i\rangle\langle b_i|c_i\rangle = |\langle c_i|b_i\rangle|^2 = |\langle c_i|a_i\rangle|^2$$

$$P_{III} = \sum_j \sum_K \langle c_i|b_j\rangle \underbrace{\langle b_j|a_i\rangle}_{\delta_{ji}} \underbrace{\langle a_i|b_K\rangle}_{\delta_{iK}} \langle b_K|c_i\rangle$$

$$= \langle c_i|b_i\rangle\langle b_i|c_i\rangle = |\langle c_i|b_i\rangle|^2 = |\langle c_i|a_i\rangle|^2$$

- O cálculo p/ o caso $[B,C]=0$ (e sem degenerescência) é semelhante.

Relação de incerteza

- Queremos caracterizar a variância de medidas não-compatíveis.
- Definimos operador $\Delta A \equiv A - \langle A \rangle$, onde a média é calculada para certo estado $|\psi\rangle$ de interesse. Então

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle = \langle (A - \langle A \rangle)(A - \langle A \rangle) \rangle = \langle (A^2 - 2A\langle A \rangle + \langle A \rangle^2) \rangle$$

$$= \langle A^2 \rangle - 2\langle A \rangle^2 + \langle A \rangle^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$$

- ΔA é definido assim para que $\langle (\Delta A)^2 \rangle$ nos dê a

$$\left.\begin{array}{l} \text{variância} \\ \text{dispersão} \\ \text{desvio quadrático médio} \end{array}\right\} \text{da medida } A \text{ p/ o estado } \langle \psi \rangle.$$

- $\langle (\Delta A)^2 \rangle = 0$ para auto-estados de A. $[\,\Delta A = A - \langle A \rangle = 0\,]$

Exemplo: auto-estado de S_z. $\langle S_x^2 \rangle - \langle S_x \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{4}$

$$\text{mas } \langle (\Delta S_z)^2 \rangle = 0$$

- Por isso dizemos que auto-estados de um operador têm resultados de medida <u>bem-definidos</u> = sem variância.

Relação de incerteza

(Teorema): Sejam A e B observáveis. Então

$$\langle (\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq \frac{1}{4} |\langle [A,B]\rangle|^2$$

Prova: Precisamos de 3 lemas.

Lema 1: Desigualdade de Schwarz $\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle \geq |\langle\alpha|\beta\rangle|^2$

Prova: Note que $\| |\alpha\rangle + \lambda|\beta\rangle\|^2 = (\langle\alpha| + \lambda^*\langle\beta|)\cdot(|\alpha\rangle+\lambda|\beta\rangle) \geq 0$

λ é nº. complexo livre. Escolhemos $\lambda = -\frac{\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}$

$$\Rightarrow \left(\langle\alpha| - \frac{\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}\langle\beta|\right)\cdot\left(|\alpha\rangle - \frac{\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}|\beta\rangle\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \langle\alpha|\alpha\rangle - \frac{\langle\beta|\alpha\rangle\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle} - \frac{\langle\alpha|\beta\rangle\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle} + \frac{\langle\alpha|\beta\rangle\langle\beta|\alpha\rangle\cancel{\langle\beta|\beta\rangle}}{\langle\beta|\beta\rangle^{\cancel{2}}} \geq 0$$

$\cdot\langle\beta|\beta\rangle$

$$\Rightarrow \langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle - |\langle\alpha|\beta\rangle|^2 \geq 0$$ como queríamos demonstrar.

Lema 2: Se A é Hermitiano, $\langle A\rangle$ é real.

P/ A Hermitiano, $\langle\psi|A|\phi\rangle = \langle\phi|A|\psi\rangle^*$ faço $|\phi\rangle = |\psi\rangle$ e pronto.

Lema 3: Se C é anti-Hermitiano ($C = -C^\dagger$), seu valor esperado é imaginário puro.

- $\langle\psi|C^\dagger|\psi\rangle = \langle\psi|C|\psi\rangle^*$ (Def. de conj. Hermitiano). Como $C^\dagger = -C$

$\Rightarrow -\langle\psi|C|\psi\rangle = \langle\psi|C|\psi\rangle^* \Rightarrow \langle C\rangle$ é Im. puro.

<u>Prova</u>: Uso Lema 1 com $|\alpha\rangle = \Delta A|\psi\rangle$

$|\beta\rangle = \Delta B|\psi\rangle$

$\Rightarrow \langle(\Delta A)^2\rangle\langle(\Delta B)^2\rangle \geq |\langle\Delta A\Delta B\rangle|^2$ [Hermiticidade de $\Delta A, \Delta B$ evita que l.e. seja complexo]

$\Delta A\Delta B = \frac{1}{2}[\Delta A, \Delta B] + \frac{1}{2}\{\Delta A, \Delta B\}$ onde $\{X,Y\} = XY + YX$

$$[\Delta A, \Delta B] = (A - \langle A\rangle)(B - \langle B\rangle) - (B - \langle B\rangle)(A - \langle A\rangle)$$

$$= AB - \langle A\rangle B - \langle B\rangle A + \langle A\rangle\langle B\rangle - BA + \langle A\rangle B + \langle B\rangle A - \langle A\rangle\langle B\rangle$$

$$= AB - BA = [A, B]$$

$\Rightarrow [\Delta A, \Delta B] = [A, B]$. Note que este operador é <u>anti-Hermitiano</u>:

$$([A,B])^\dagger = (AB - BA)^\dagger = B^\dagger A^\dagger - A^\dagger B^\dagger = BA - AB = -[A,B].$$

Já o anti-comutador $\{\Delta A, \Delta B\}$ é Hermitiano [fácil de verificar]. Então

$$\langle\Delta A\Delta B\rangle = \frac{1}{2}\underbrace{\langle[A,B]\rangle}_{\text{Im. puro}} + \frac{1}{2}\underbrace{\langle\{\Delta A, \Delta B\}\rangle}_{\text{Re. puro}}$$ [⇐ Lemas 2 e 3]

$$\Rightarrow |\langle\Delta A\Delta B\rangle|^2 = \frac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2 + \underbrace{\frac{1}{4}|\langle\{\Delta A, \Delta B\}\rangle|^2}_{\geq 0} \Rightarrow \text{CQD}.$$

Mudança de base

- Se A e B são observáveis incompatíveis, podemos expandir qualquer est. $|\psi\rangle$ na base de auto-estados de A $\{|a_i\rangle\}$
  ou na " " de B $\{|b_i\rangle\}$

- Vamos construir um op. que leve uma base à outra.

Teorema: Dados 2 bases completas e ortonormais $\{|a_i\rangle\}$ e $\{|b_i\rangle\}$, existe um operador unitário U tal que

$$|b_1\rangle = U|a_1\rangle, \ |b_2\rangle = U|a_2\rangle, \ldots, |b_d\rangle = U|a_d\rangle$$

Operadores unitários: $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1}$.

[Generalização de matrizes ~~ortogonais~~ ortogonais $R^T = R^{-1} \Rightarrow R^T R = R R^T = \mathbb{1}$
Matrizes ortogonais com $\det = 1 \Rightarrow$ matrizes de rotação.]

Prova (construtiva):

$$U = \sum_k |b_k\rangle\langle a_k| \quad . \text{ Veja:}$$

$U|a_i\rangle = |b_i\rangle$ como queremos, e U é unitário:

$$U^\dagger U = \sum_k \sum_\ell |a_\ell\rangle \underbrace{\langle b_\ell | b_k\rangle}_{\delta_{k,\ell}} \langle a_k| = \sum_k |a_k\rangle\langle a_k| = \mathbb{1}$$ e similarmente p/ $UU^\dagger$.

Representação matricial de U

- Vamos considerar a repres. matricial de U na base $\{|a_i\rangle\}$.

$$\langle a_k|U|a_l\rangle = \langle a_k|b_l\rangle$$

← elementos de matriz de U são produtos internos da base $\{|a_i\rangle\}$ e $\{|b_i\rangle\}$

- Se sabemos expandir um ket na base $\{|a_i\rangle\}$:

$$|\alpha\rangle = \mathbb{1}|\alpha\rangle = \sum_i |a_i\rangle\langle a_i|\alpha\rangle$$

é fácil encontrar os coef. $\langle b_j|\alpha\rangle$ da expansão na nova base:

$$[\cdot\langle b_j|] \Rightarrow \langle b_j|\alpha\rangle = \sum_i \underbrace{\langle b_j|a_i\rangle}\langle a_i|\alpha\rangle = \sum_i \overbrace{\langle a_j|U^\dagger|a_i\rangle}\langle a_i|\alpha\rangle$$

- Em notação matricial, $\Big(\ \Big) = U^\dagger\Big(\ \Big)$

repres. na base $\{|b_i\rangle\}$ — repres. na base $\{|a_i\rangle\}$.

- De forma parecida, encontramos os elementos de matriz do op. C na nova base $\{|b_i\rangle\}$, em função dos coef. na base antiga ($\{|a_i\rangle\}$):

$$\langle b_k|C|b_l\rangle = \langle b_k|\mathbb{1}\,C\,\mathbb{1}|b_l\rangle$$

$$= \sum_m \sum_n \langle b_k|a_m\rangle\langle a_m|C|a_n\rangle\langle a_n|b_l\rangle =$$

$$= \sum_m \sum_n \langle a_k|U^\dagger|a_m\rangle\langle a_m|C|a_n\rangle\langle a_n|U|a_l\rangle$$

• Em notação matricial, a mudança de base é uma transformação de similaridade:

$$C' = U^{+} X U$$

• O traço de uma matriz = soma dos elementos na diagonal:

$$\mathrm{Tr}(M) = \sum_i \langle \phi_i | M | \phi_i \rangle$$

é independente da representação (base):

$$\sum_i \langle \phi_i | M | \phi_i \rangle = \sum_i \langle \phi_i | \mathbb{1} M \mathbb{1} | \phi_i \rangle$$

$$= \sum_k \sum_i \sum_j \langle \phi_i | b_j \rangle \langle b_j | M | b_k \rangle \langle b_k | \phi_i \rangle$$

$$= \sum_j \sum_k \langle b_j | M | b_k \rangle \underbrace{\sum_i \langle \phi_i | b_j \rangle \langle b_k | \phi_i \rangle}_{= \sum_i \langle b_k | \phi_i \rangle \langle \phi_i | b_j \rangle \; = \; \langle b_k | b_j \rangle}$$

$$= \sum_k \underbrace{\sum_j \langle b_k | b_j \rangle \langle b_j |}_{\mathbb{1}} M | b_k \rangle = \sum_k \langle b_k | M | b_k \rangle$$

• Também dá p/ provar:

$$\begin{cases} \mathrm{Tr}(XY) = \mathrm{Tr}(YX) \\ \mathrm{Tr}(U^{+} X U) = \mathrm{Tr}(X) \\ \mathrm{Tr}(|a_i\rangle\langle a_j|) = \delta_{ij} \\ \mathrm{Tr}(|b_i\rangle\langle a_i|) = \langle a_i | b_i \rangle \end{cases}$$