

Questões de Física

[BALL-11.3] Part. carregada em
Campo B CTE

• Part. carregada (carga q) em campo EM: $H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + q\phi$ ①

• Agora $\vec{B} = B \hat{z}$.

• Vamos escolher $\vec{A}$ conveniente: $\vec{A} = -yB \hat{x} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ (div de ~~campo~~ ^{campo} ~~potencial~~ ^{potencial})
e $\vec{\nabla} \times \vec{A} = B \hat{z}$.

• Hamiltonian ① fica: $H = \frac{1}{2m} \left[\left(p_x + \frac{yqB}{c} \right)^2 + p_y^2 + p_z^2 \right]$

• Note: $[p_x, H] = [p_y, H] = 0$ mas $[p_z, H] \neq 0$ (por causa do y ali)

$\Rightarrow$ dá pl construir conj. completo de auto-est. simultâneos de H, p_x, p_z .

• Agora resolver: $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$: (repar. de coordenadas) $\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$

$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi}_{\left[\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} \right] \psi} - \underbrace{\frac{i\hbar q}{mc} B y \frac{\partial \psi}{\partial x}}_{\left(\frac{1}{2m} \left(\frac{2 \cdot p_x \cdot yqB}{c} \right) \right) \psi} + \underbrace{\frac{q^2 B^2}{2mc^2} y^2 \psi}_{\left(\frac{1}{2m} \left(\frac{y^2 B^2}{c^2} \right) \right) \psi} = E \psi \quad ②$$

• Sei que posso escolher ψ como autofunção de p_x e p_z (= ondas planas de x e z)

$\Rightarrow \psi(x, y, z) = \exp[i(k_x x + k_z z)] \phi(y)$ Jogo em ②:

$$\Rightarrow \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \phi(y)}{dy^2} + \frac{\hbar^2 B k_x}{mc} y \phi(y) + \left[\frac{q^2 B^2}{2mc^2} y^2 + \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_z^2) - E \right] \phi(y) = 0$$

• Agora tiro a origem, mudando-a p/ o ponto $(0, -\frac{\hbar k_x c}{qB})$.

$\Rightarrow \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \phi(y)}{dy^2} + \left[\frac{m \omega_c^2}{2} (y - y_0)^2 - E \right] \phi(y) = 0$

com $\omega_c = \frac{qB}{mc}$
= freq. clássica de ciclotron
 $E' = E - \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m}$
= energia associada ao mov. no plano xy .

Compare com a eq. de Schrödinger para o OH 1D:

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \psi(x) = E \psi(x)$$

e identificamos: $\omega = |\omega_c|$, $E' = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$.

- Por isso, energia de part. carregada ~~em~~ em $\vec{B}$ uniforme é

$$E' = \hbar|\omega_c|(n + \frac{1}{2}) + \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} \quad \left[\omega_c \equiv \frac{qB}{mc} \text{ como definido anteriormente} \right]$$

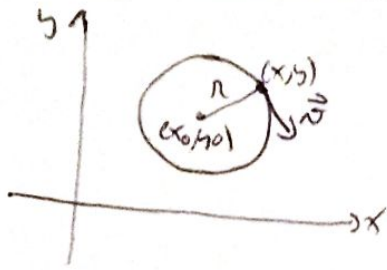
- As ~~algumas~~ funções $\phi(y)$ sã autofunções do OH. A menos de CTE de normalização:

$$\psi(x, y, z) = \exp[i(k_x x + k_z z)] H_n[\alpha(y - y_0)] \exp\left[-\frac{\alpha^2}{2}(y - y_0)^2\right] \quad \text{onde } \otimes$$

$$\text{com } \alpha = (m|\omega_c|\hbar)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{|q|B}{\hbar c}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ e } y_0 = -\frac{\hbar k_x c}{qB} \text{ e } H_n \text{ é polim. de Hermite.}$$

- Comparando com caso clássico $\Rightarrow$ estranho! Claramente, temos órbita circular no plano xy . Aqui, dep. de x é orda plano, e em y é fc. de osc. do OH.

Coordenadas do centro da órbita



$q > 0$ Mov. circular:

$$\frac{q\phi B}{c} = \frac{mv^2}{r}$$

(~~Força~~ ~~centrípeta~~ ~~+ aceleração~~
centrípeta)

$$\omega_c \equiv \frac{v}{r} = \frac{qB}{mc} \text{ é indep. do raio da órbita.}$$

eq. de movimento: $x - x_0 = r \cos(\omega_c t + \theta)$

$$\dot{x} = -\omega_c r \sin(\omega_c t + \theta)$$

[Assumo $q > 0$]

$$y - y_0 = -r \sin(\omega_c t + \theta)$$

$$\dot{y} = -\omega_c r \cos(\omega_c t + \theta)$$

Coord. do centro da órbita: $x_0 = x + \frac{\dot{y}}{\omega_c}$

$$y_0 = y - \frac{\dot{x}}{\omega_c}$$

as constantes do movimento.

Defin. op. velocidade de part. carregada em campo: $H = \frac{1}{2m} \left(p - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 + q\phi$

$$\vec{p}_\alpha = \frac{1}{m} \left(p_\alpha - \frac{q}{c} A_\alpha \right) \quad (\alpha = x, y, t)$$

[propriedades estudadas em prob. de lista]

Def. ops. $x_0 = x + \frac{\dot{y}}{\omega_c}$, $y_0 = y - \frac{\dot{x}}{\omega_c}$

Fácil de verificar [lista] que $[H, x_0] = [H, y_0] = 0 \leftarrow$ CTEs do movimento também na MQ.

Mas $[x_0, y_0] = -\frac{\hbar c}{qB} \neq 0$.

Agora de volta p/ $\vec{B} = B\hat{z}$; escolha (conveniente) $\vec{A} = (-yB, 0, 0)$.

$$\Rightarrow x_0 = x + \frac{c p_y}{qB}, \quad y_0 = -\frac{c p_x}{qB}$$

Olhando p/ $\psi(x, y, t)$ que encontramos [~~o~~ ~~na~~ ~~eq. anterior~~] vemos que a auto-est.

de $\hat{y}_0 = -\frac{c p_x}{qB}$ com autovalor $y_0 = -\frac{\hbar k_x}{qB}$

O componente $\hbar k_x$ do momento na direção x deve surgir na direção y !

Fz. de onda é aprox. um ensemble de órbitas circulares com centros distribuídos na reta $y = y_0$. (!!!)