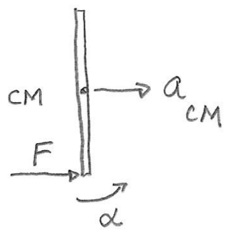
GABARITO

MECÂNICA GERAL - 2/2018

TESTE 8 — 05/12/2018

NOME:

1. (5 pontos) Sobre uma das extremidades de uma barra uniforme apoiada sobre uma mesa horizontal sem atrito começa a agir uma força horizontal, perpendicular à barra. A barra está inicialmente em repouso. Seu comprimento é L e sua massa M. Determine o ponto da barra que tem aceleração inicial nula. Dado: o momento de inércia da barra em relação a um eixo perpendicular passando pelo centro de massa é $ML^2/12$.

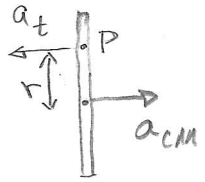


No instante em que a força é aplicada, a aceleração do centro de massa é determinada por

$$Ma_{CM} = F \Rightarrow a_{CM} = F/M.$$

Quanto à aceleração angular da barra, com $I_{CM} = \frac{ML^2}{12}$,

$$I_{CM}\alpha = \Gamma_{CM} = F\frac{L}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{12}{ML^2}F\frac{L}{2} = \frac{6F}{ML}.$$



A aceleração tangencial do ponto P é $a_t = -\alpha r = -\frac{6Fr}{ML}$.
Portanto, a aceleração do ponto P é

$$a_P = a_{CM} + a_t = \frac{F}{M} - \frac{6Fr}{ML} = \frac{F}{M}\left(1 - \frac{6r}{L}\right).$$

Teremos $a_P = 0$ se $6r/L = 1$, isto é, se $r = L/6$.

2. As equações de Euler para um corpo rígido são

$$\begin{aligned}
\lambda_1\dot\omega_1 &- (\lambda_2 - \lambda_3)\,\omega_2\,\omega_3 = \Gamma_1\,,\\
\lambda_2\dot\omega_2 &- (\lambda_3 - \lambda_1)\,\omega_3\,\omega_1 = \Gamma_2\,,\\
\lambda_3\dot\omega_3 &- (\lambda_1 - \lambda_2)\,\omega_1\,\omega_2 = \Gamma_3\,.
\end{aligned}$$

Uma nave espacial simétrica ($\lambda_1 = \lambda_2$) move-se no espaço sideral. Motores simetricamente situados aplicam um torque que só possui a componente constante Γ_3 ao longo do eixo de simetria. As condições iniciais são $\omega_1(0) = 0, \omega_2(0) = \Omega, \omega_3(0) = 0$.
(a) **(2 pontos)** Determine $\omega_3(t)$.
(b) **(3 pontos)** Prove que $\omega_1^2 + \omega_2^2 =$ constante e determine o valor da constante.

(a) Como $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, a terceira equação de Euler torna-se

$$\lambda_3\dot\omega_3 = \Gamma_3 \Rightarrow \dot\omega_3(t) = \frac{\Gamma_3}{\lambda_3} \Rightarrow \omega_3(t) = \frac{\Gamma_3}{\lambda_3}t$$

por causa da condição inicial $\omega_3(0) = 0$.

(b) $$\frac{d}{dt}(\omega_1^2 + \omega_2^2) = 2(\omega_1\dot\omega_1 + \omega_2\dot\omega_2) = 2\left[\omega_1\frac{\lambda-\lambda_3}{\lambda}\omega_2\omega_3 + \omega_2\frac{\lambda_3-\lambda}{\lambda}\omega_3\omega_1\right] = 2\frac{\omega_1\omega_2\omega_3}{\lambda}\left[\lambda-\lambda_3+\lambda_3-\lambda\right] = 0.$$

Portanto,

$$\omega_1(t)^2 + \omega_2(t)^2 = c^{te} = \omega_1(0)^2 + \omega_2(0)^2.$$

Como $\omega_1(0) = 0$ e $\omega_2(0) = \Omega$, segue-se que $c^{te} = \Omega^2$.