GABARITO

MECÂNICA GERAL - 2/2018

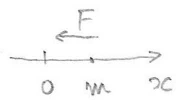
PROVA 1 — 19/09/2018

PROFESSOR: NIVALDO A. LEMOS

NOME:

A PROVA É COMPOSTA POR TRÊS QUESTÕES

Questão 1. Uma partícula de massa m move-se ao longo do eixo x sujeita à força de arraste $F = -cv^{3/2}$, onde c é um constante positiva. A partícula parte da origem com velocidade $v_0 > 0$.
(a) **(2,0 pontos)** Determine $v(t)$.
(b) **(2,0 pontos)** Determine $x(t)$ e calcule a distância percorrida pela partícula até parar.

(a) 

$2^{\underline{a}}$ lei de Newton: $m\frac{dv}{dt} = -cv^{3/2} \Longrightarrow v^{-3/2}dv = -\frac{c}{m}dt.$

Integrando: $\int_{v_0}^{v} v'^{-3/2}dv' = -\frac{c}{m}\int_0^t dt' \Longrightarrow -2\, v'^{-1/2}\Big|_{v_0}^{v} = -\frac{c}{m}t$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{1}{\sqrt{v_0}} = \frac{ct}{2m} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{v}} = \frac{1}{\sqrt{v_0}} + \frac{ct}{2m} = \frac{1}{\sqrt{v_0}}\left(1 + \frac{c\sqrt{v_0}}{2m}t\right).$$

Definindo

$$\tau = \frac{2m}{c\sqrt{v_0}},$$

temos

$$\sqrt{v} = \frac{\sqrt{v_0}}{1+t/\tau} \Longrightarrow v(t) = \frac{v_0}{(1+t/\tau)^2}.$$

(b) Integrando $\frac{dx}{dt} = v(t)$ resulta

$$x(t) - x(0) = \int_0^t v(t')dt' = \int_0^t \frac{v_0\, dt'}{(1+t'/\tau)^2} = -v_0\tau \left.\frac{1}{1+t'/\tau}\right|_0^t.$$

Como $x(0) = 0$, ficamos com

$$x(t) = v_0\tau\left[1 - \frac{1}{1+t/\tau}\right] = \frac{v_0 t}{1+t/\tau}.$$

A partícula para no limite $t \to \infty$. Neste limite,

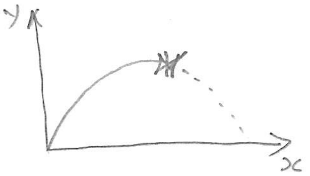
$$d = \lim_{t\to\infty} x(t) = v_0\tau \lim_{t\to\infty}\left[1 - \frac{1}{1+t/\tau}\right] = v_0\tau = \frac{2m\sqrt{v_0}}{c}.$$

Questão 2. Um projétil é lançado da superfície da Terra para atingir um alvo situado a uma distância horizontal de 100 m do ponto de lançamento. Nas condições deste problema a resistência do ar é desprezível e a trajetória do projétil é uma parábola. Antes de atingir o alvo, no entanto, o projétil explode e se parte em dois pedaços de mesma massa.

(a) **(1 ponto)** Qual é a trajetória seguida pelo centro de massa do sistema após a explosão? **Justifique sua resposta.**

(b) **(2,0 pontos)** Se os dois pedaços atingem o chão ao mesmo tempo e um deles cai 50 m além do alvo, onde cai o outro pedaço? **Justifique sua resposta.**

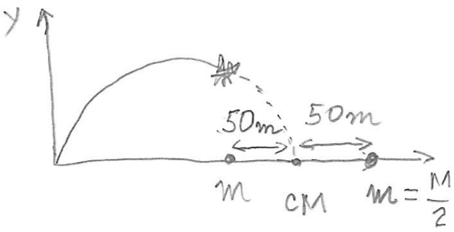
(c) **(1,0 ponto)** O mesmo resultado que o do item (b) seria obtido se os pedaços caíssem em instantes diferentes, com um deles ainda caindo 50 m além do alvo? **Justifique sua resposta.**

(a) 

Como a força externa resultante é a mesma antes e depois da explosão,

$$\vec{F}^{\,ext} = M\vec{g} = -Mg\hat{y},$$

o centro de massa segue a mesma trajetória parabólica que o projétil seguiria se não explodisse.

(b) 

Se um pedaço cai 50m além do alvo, o outro pedaço de mesma massa cai 50 m aquém do alvo porque o centro de massa tem que estar no ponto médio dos dois pedaços, dado que eles têm a mesma massa.

(c) NÃO. No momento em que um dos pedaços atinge o chão, com o outro pedaço ainda no ar, a força externa resultante sobre o sistema muda por causa da força exercida pelo chão sobre o pedaço que cai primeiro. A partir do impacto do primeiro pedaço com o chão, o CM não segue mais a mesma trajetória que o projétil seguiria se não explodisse.

Questão 3. Considere a força

$$\mathbf{F} = 2xyz^2\hat{\mathbf{x}} + x^2z^2\hat{\mathbf{y}} + ax^2yz\hat{\mathbf{z}}$$

onde a é uma constante.

(a) **(1 ponto)** Para que valor de a esta força é conservativa?

(b) **(1 ponto)** No caso em que esta força é conservativa, obtenha a energia potencial correspondente U.

(a) Devemos ter $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$, isto é,

$$0=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{x}+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{y}+\left(\frac{\partial F_x}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial x}\right)\hat{z}.$$

Portanto, devemos ter

$$\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}(ax^2yz)-\frac{\partial}{\partial z}(x^2z^2)=ax^2z-2x^2z=0 \Rightarrow \boxed{a=2}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}(2xyz^2)-\frac{\partial}{\partial x}(ax^2yz)=4xyz-2axyz=0 \Rightarrow \boxed{a=2}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}(2xyz^2)-\frac{\partial}{\partial x}(x^2z^2)=2xz^2-2xz^2=0. \text{ (OK)}$$

Portanto, a força é conservativa se $a=2$:

$$\vec{F}=2xyz^2\hat{x}+x^2z^2\hat{y}+2x^2yz\hat{z}.$$

(b) Devemos ter $\vec{F}=-\vec{\nabla}U$, o que implica

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-F_x=-2xyz^2 \Rightarrow U=-x^2yz^2+f(y,z).$$

Além disso, devemos ter

$$\frac{\partial U}{\partial y}=-F_y \Rightarrow -x^2z^2+\frac{\partial f}{\partial y}=-x^2z^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}=0 \Rightarrow f=g(z).$$

Portanto,

$$U=-x^2yz^2+g(z).$$

Finalmente, devemos ter

$$\frac{\partial U}{\partial z}=-F_z \Rightarrow -2x^2yz+g'(z)=-2x^2yz \Rightarrow g'(z)=0 \Rightarrow g=C.$$

Podemos escolher $C=0$, o que dá

$$U(x,y,z)=-x^2yz^2.$$