GABARITO

MECÂNICA GERAL - 2/2018

PROVA 3 — 12/12/2018

PROFESSOR: NIVALDO A. LEMOS

NOME:

A PROVA É COMPOSTA POR TRÊS QUESTÕES

Questão 1. Uma partícula de massa m move-se sob a ação de uma força central atrativa cuja energia potencial é $U(r) = -\kappa/r^4$, com $\kappa > 0$. O momento angular da partícula em relação ao centro atrator tem módulo $l > 0$.

(a) **(1 ponto)** Esboce um gráfico da energia potencial efetiva deste problema, dada por

$$U_{ef} = U(r) + \frac{l^2}{2mr^2}.$$

(b) **(1 ponto)** A partir do gráfico da energia potencial efetiva, determine os valores da energia para os quais a partícula **necessariamente** cai sobre o centro de atração.

(c) **(1 ponto)** Encontre o raio da órbita circular possível.

(d) **(1 ponto)** Essa órbita circular é estável? Justifique sua resposta.

(a) $U_{ef} = -\dfrac{\kappa}{r^4} + \dfrac{l^2}{2mr^2}$

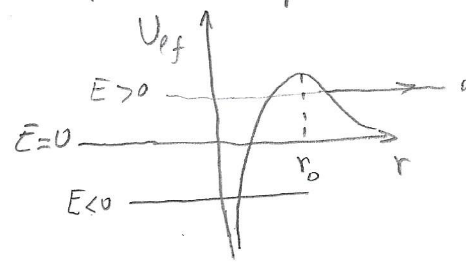
Para $r \to 0$, $U_{ef} \to -\infty$; para $r \to \infty$, $U_{ef} \to 0$ por valores positivos.

Temos

$$U'_{ef}(r) = \frac{4\kappa}{r^5} - \frac{l^2}{mr^3} = 0$$

somente para

$$r = r_0 = \sqrt{\frac{4\kappa m}{l^2}} = \frac{2\sqrt{\kappa m}}{l}.$$



Portanto, r_0 é o único ponto crítico, que é ponto de máximo. O gráfico só pode ser como mostrado na figura acima.

(b) Vê-se do gráfico que se $E \leq 0$ a partícula necessariamente cai sobre o centro de força. Se $E > 0$ a partícula pode escapar para o infinito.

(c) Calculado no item (a): $r_0 = \dfrac{2\sqrt{\kappa m}}{l}$.

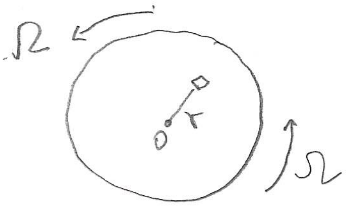
(d) A órbita circular é instável porque r_0 é um ponto de máximo de U_{ef}.

Questão 2. Uma mesa circular horizontal de raio suficientemente grande gira com velocidade angular constante Ω no sentido anti-horário (vista de cima) em torno de um eixo vertical que passa pelo centro da mesa. Deseja-se pôr um pequeno bloco sobre a mesa de modo que ele permaneça em repouso em relação à mesa, mantido assim pela força de atrito estático. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e a mesa é μ.

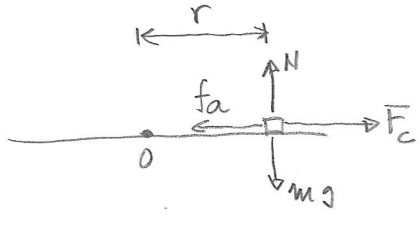
(a) **(2 pontos)** Utilizando o sistema de referência girante, determine a máxima distância do bloco ao eixo de rotação que lhe permite permanecer em repouso relativamente à mesa.

(b) **(1 ponto)** Seja r_{max} a distância máxima do item anterior e suponha que a região da mesa com $r > r_{max}$ seja perfeitamente lisa. Se o bloco for ligeiramente deslocado radialmente de sua posição de equilíbrio em $r = r_{max}$ para uma posição com $r > r_{max}$, descreva **qualitativamente** a trajetória do bloco vista do referencial girante.

(a)



Vista de cima



Vista lateral

Como o bloco deve ficar em repouso no referencial da mesa girante, as forças que atuam sobre ele no referencial girante são o peso, a força normal e a força de atrito exercidas pela mesa, e a força centrífuga. Como o bloco está em equilíbrio no referencial girante,

$$f_a - F_c = 0, \quad N - mg = 0,$$

onde

$$F_c = m\Omega^2 r.$$

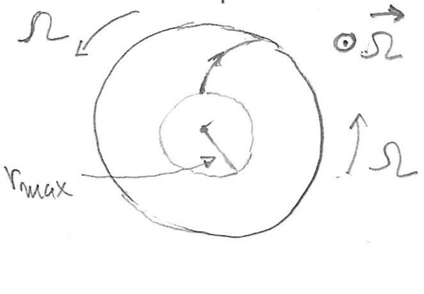
A distância máxima é aquela em que o bloco fica na iminência de deslizar. Nessa situação

$$f_a = \mu N = \mu mg,$$

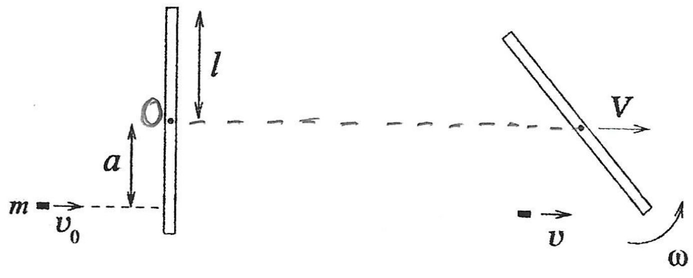
donde

$$\mu mg = m\Omega^2 r_{max} \implies r_{max} = \frac{\mu g}{\Omega^2}.$$

(b) Se $r > r_{max}$ a partícula começará a se mover radialmente e será desviada para a direita pela força de Coriolis $\vec{F}_{cor} = 2m\vec{v} \times \vec{\Omega}$.



Questão 3. Numa mesa horizontal sem atrito, um barra uniforme de massa M e comprimento $2l$, em repouso, é atingida perpendicularmente por um projétil de massa m e velocidade v_0. A barra é atingida a uma distância a do seu centro de massa. A colisão é **elástica** e o momento de inércia da barra em relação a um eixo perpendicular passando pelo centro de massa é $I = Ml^2/3$.



(a) **(1 ponto)** Quais são as grandezas físicas que se conservam na colisão? Justifique sua resposta.
(b) **(1 ponto)** Em relação a um sistema de referência inercial com origem O na posição ocupada pelo centro de massa da barra antes da colisão, explique por que as equações que representam as leis de conservação para este problema são:

$$mv_0 = mv + MV, \tag{1}$$
$$mv_0 a = mva + I\omega, \tag{2}$$
$$\frac{m}{2}v_0^2 = \frac{m}{2}v^2 + \frac{M}{2}V^2 + \frac{I}{2}\omega^2. \tag{3}$$

(c) **(1 ponto)** Se $a = l$, para que valor de m o projétil ficará em repouso depois da colisão?

(a) Como a força externa resultante e o torque externo resultante são nulos, o momento linear e o momento angular se conservam. Por definição de colisão elástica, a energia cinética se conserva.

(b) A Eq. (1) representa a conservação do momento linear: mv_0 é o momento linear antes da colisão (só o projétil se move); depois da colisão o momento linear é $mv + MV$ onde V é a velocidade do centro de massa da barra.
A Eq. (2) representa a conservação do momento angular: $mv_0 a$ e mva são os módulos do momento angular do projétil em relação ao ponto O (ver figura) antes e depois da colisão; $I\omega$ é a contribuição da rotação em torno do CM para o momento angular da barra. O movimento do CM da barra não contribui para o seu momento angular porque a linha de ação de $\vec{V}$ passa pelo ponto O.

A Eq. (3) representa a conservação da energia cinética: $\frac{m v_0^2}{2}$ e $\frac{m v^2}{2}$ são as energias cinéticas do projétil antes e depois da colisão; a energia cinética da barra é T(do CM) + T(em rel. ao CM) isto é, $T_{barra} = \frac{MV^2}{2} + \frac{1}{2} I \omega^2$.

(c) Se $a = l$ e $v = 0$ temos

$$(1) \Rightarrow m v_0 = MV \Rightarrow V = \frac{m v_0}{M} \quad (4);$$

$$(2) \Rightarrow m v_0 l = I\omega \Rightarrow \omega = \frac{m v_0 l}{I} \quad (5).$$

Substituindo (4) e (5) em (3) com $v = 0$, temos

$$m \cancel{v_0^2} = M \frac{m^2 \cancel{v_0^2}}{M^2} + I \frac{m^2 v_0^2 l^2}{I^2},$$

ou seja,

$$m = \frac{m^2}{M} + \frac{m^2 l^2}{I}.$$

Cancelando o fator comum $\underline{m}$ e usando $I = \frac{Ml^2}{3}$, resulta

$$1 = \frac{m}{M} + m l^2 \frac{3}{Ml^2} = \frac{m}{M} + \frac{3m}{M} = \frac{4m}{M},$$

donde

$$m = \frac{M}{4}.$$