MECÂNICA GERAL - 2/2019

LISTA 9

1. Duas partículas de massas m_1 e m_2 estão ligadas por uma mola reta de massa desprezível, comprimento L quando relaxada e constante elástica k. Inicialmente, m_2 está em repouso sobre uma mesa enquanto eu seguro m_1 na vertical de m_2 e à uma altura L - a mola está, portanto, relaxada. No instante $t = 0$ eu projeto m_1 verticalmente para cima com velocidade inicial v_0. Determine as posições das duas massas para qualquer instante t posterior (mas antes que pelo menos uma delas retorne à mesa). Suponha que v_0 é pequeno o suficiente para garantir que as duas massas nunca colidam. (Sugestão : decomponha a lagrangiana em duas parcelas independentes, como feito para o problema geral de dois corpos sob força central).

2. No problema de dois corpos sob força central, mostre que, no referencial do centro de massa (CM), o momento angular $\vec{l_1}$ da partícula 1 está relacionado com o momento angular total $\vec{L}$ pela equação $\vec{l_1} = (m_2/M)\vec{L}$, onde M é a massa total do sistema. Obtenha uma equação similar para o momento angular $\vec{l_2}$ da partícula 2. (Comentário: isto mostra que, como $\vec{L}$ é conservado no referencial CM, o mesmo é também verdadeiro para $\vec{l_1}$ e $\vec{l_2}$ separadamente neste referencial).

3. (a) Use a mecânica newtoniana elementar para encontrar o período do movimento circular de raio r de uma massa m_1 em torno de uma massa m_2 fixa.

(b) Use a separação entre os movimentos do CM e da coordenada relativa para encontrar este período no caso em que m_2 não está fixa e as massas giram uma em torno da outra a uma distância constante r entre elas. Discuta o limite deste resultado quando $m_2 \to \infty$.

(c) Qual seria o período orbital se nosso planeta fosse substituído por uma estrela de massa igual à massa do Sol, movendo-se numa órbita circular, com uma distância entre o Sol e esta estrela igual à distância atual entre o Sol e a Terra? (A massa do Sol é mais que 300.000 vezes maior que a da Terra.)

4. Considere duas partículas de mesma massa $m_1 = m_2$, ligadas entre si por uma mola reta e de massa desprezível, de constante elástica k e comprimento L quando relaxada, e livres para deslizar sobre uma mesa horizontal sem atrito.

(a) Escreva a lagrangiana deste sistema em termos das coordenadas $\vec{r_1}$ e $\vec{r_2}$, e depois reescreva-a em termos das coordenadas do CM $\vec{R}$ e da coordenada relativa $\vec{r}$, usando neste caso coordenadas polares (r, ϕ) para $\vec{r}$.

(b) Obtenha as equações de Lagrange para as coordenadas do CM X, Y e resolva-as.

(c) Escreva as equações de Lagrange para r e ϕ. Resolva estas equações em dois casos especiais: (i) se r é constante; e (ii) se ϕ é constante. Descreva os movimentos resultantes em cada caso. Em particular, mostre que a frequência das oscilações resultantes no segundo caso é $\omega = \sqrt{2k/m_1}$

5. (a) Analise a energia potencial efetiva obtida para o problema de dois corpos sob a ação de uma força central conservativa e determine o raio da órbita circular possvel para um planeta (ou cometa) de momento angular ℓ. (Sugestão: olhe para dU_{ef}/dr.)

(b) Mostre que esta órbita circular é estável, no sentido que qualquer pequena perturbação radial provocará apenas pequenas oscilações radiais (olhe para d^2U_{ef}/dr^2.) Mostre que o período destas oscilações é igual ao período orbital do planeta.

6. No problema 6 da lista 5 você tomou contato com o **teorema do virial** para uma partícula em órbita circular sob a ação de uma força central com energia potencial da forma $U = kr^n$. Vamos agora demonstrar uma forma mais geral deste teorema que se aplica a uma partícula em qualquer órbita periódica.

(a) Determine a derivada temporal da quantidade $G = \vec{r} \cdot \vec{p}$ e, integrando desde 0 até um instante arbitrário t, demonstre que

$$\frac{G(t) - G(0)}{t} = 2 < T > + < \vec{F} \cdot \vec{r} >$$

onde $\vec{F}$ é a força resultante sobre a partícula e $< f >$ denota a média sobre o tempo da quantidade f.

(b) Explique porque, se a órbita da partícula é periódica e se fizermos t suficientemente grande, podemos fazer o lado esquerdo desta equação ser tão pequeno quanto queiramos. Isto é, o lado esquerdo vai a zero quando $t \to \infty$.

(c) Use este resultado para provar que, se $\vec{F}$ provém de uma energia potencial $U = kr^n$, então $< T >= n < U > /2$, se agora $< f >$ denota a média temporal tomada sobre um intervalo de tempo muito grande.