MECÂNICA GERAL - 1/2019

LISTA 9

1. Um raio de luz vai de um ponto P_1 num meio de índice de refração n_1 até um ponto P_2 num meio de índice de refração n_2, passando pelo ponto Q (cuja posição exata temos que determinar) na interface plana entre os dois meios. Mostre que o princípio de Fermat implica em que, na trajetória seguida pelo raio de luz, Q tem que estar num plano perpendicular à interface que contenha os pontos P_1 e P_2 e que esta trajetória obedeça á lei de Snell. (Sugestões: escolha o plano da interface como o plano xz, e escolha o eixo y passando pelo ponto P_1 de modo que suas coordenadas sejam $(0, h_1, 0)$ e que as coordenadas de P_2, situado no plano xy, sejam $(x_2, -h_2, 0)$. Chame as coordenadas de Q de $(x, 0, z)$. Calcule o tempo que a luz leva para percorrer o trajeto P_1QP_2 e mostre que este tempo é mínimo quando a coordenada z do ponto Q é nula, e o trajeto obedece à lei de Snell.)

2. De um modo geral, o integrando $f(y, y', x)$ cuja integral queremos minimizar depende de y, y' e x. Quando f é independente de uma destas variáveis, o problema pode se simplificar bastante. Nestes casos, podemos encontrar com facilidade uma constante de movimento, chamada neste contexto de uma **primeira integral** das equações de Euler-Lagrange. Esta primeira integral reduz o problema, que em geral é traduzido por uma equação diferencial de 2^a ordem, numa equação de 1^a ordem, mais fácil de resolver.
(a) Suponha que $f = f(y', x)$ não dependa de y. Prove que, neste caso, a equação de Euler-Lagrange se reduz a

$$\partial f/\partial y' = constante$$

Na mecânica Lagrangeana, veremos que esta simplificação ocorre sempre que uma componente do momento se conserva.
(b) Suponha agora que $f = f(y, y')$ não dependa da variável independente x. Prove que, neste caso,

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y''.$$

Em seguida, use a equação de Euler-Lagrange para substituir $\partial f/\partial y$ do lado direito e mostre portanto que

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left(y' \frac{\partial f}{\partial y'}\right).$$

Prove que este resultado nos dá imediatamente uma primeira integral dada por

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = constante.$$

Este resultado pode simplificar muitos cálculos. Na mecânica Lagrangeana, onde a variável independente é o tempo t, o resultado correspondente a este é que, se a função Lagrangeana for independente de t, então a energia é conservada.

3. Considere um objeto de massa m que pode se mover em duas dimensões com uma energia potencial $U(x, y) = \frac{1}{2}kr^2$, onde $r^2 = x^2 + y^2$. Escreva a lagrangiana, usando as coordenadas x e y, e obtenha as equações de movimento de Lagrange. Descreva suas soluções. (Esta é a energia potencial de um íon numa "armadilha de íons", que pode ser usada para estudar as propriedades de íons atômicos individuais.)

4. Considere uma partícula de massa m que se move sobre um plano sem atrito, inclinado de um ângulo α com relação à horizontal. Escreva a lagrangiana em termos das coordenadas cartesianas x, horizontal, e y, orientada para baixo ao longo do plano. O sistema é bidimensional - as coordenadas x e y da partícula são independentes. Não esqueça de incluir a energia potencial gravitacional. Encontre as duas equações de Lagrange e mostre que elas são as que você deveria esperar.

5. Considere duas partículas se movendo sem vínculos em 3 dimensões, com energia potencial $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$.

(a) Escreva as seis equações de movimento obtidas pela aplicação da segunda lei de Newton a cada partícula.

(b) Escreva a lagrangiana $\mathcal{L}\ (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) = T - U$ e mostre que as seis equações de Lagrange são idênticas as equações newtonianas obtidas no item (a). Este resultado demonstra a validade das equações de Lagrange em coordenadas cartesianas, o que por sua vez demonstra o princípio de Hamilton. Como este último é independente do sistema de coordenadas, isto prova a validade das equações de Lagrange em qualquer sistema de coordenadas.