MECÂNICA GERAL - 2/2019

LISTA 7

1. Considere um oscilador amortecido com frequência natural fixa ω_0 e constante de amortecimento β (pequena - o que isto quer dizer?) também fixa que está sendo forçado por uma força senoidal de frequência ω, que podemos fazer variar. Mostre que a amplitude da resposta do oscilador no estado estacionário é máxima quando $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$. (Note que se a ressonância é estreita, isto é, se o valor de Q é grande, isto implica em que $\omega \approx \omega_0$.)

2. No problema anterior, você mostrou que se a frequência do forçamento ω pode variar, a resposta máxima do oscilador (A^2) amortecido e forçado ocorre quando $\omega \approx \omega_0$ (se a frequência natural do oscilador livre é ω_0 e a constante de amortecimento $\beta << \omega_0$). Mostre que A^2 é igual à metade de seu valor máximo quando $\omega \approx \omega_0 \pm \beta$, de modo que a largura total da curva de ressonância na metade de seu máximo é 2β. (*Sugestão :* Seja cuidadoso com as aproximações usadas. Por exemplo, pode se dizer que $\omega + \omega_0 \approx 2\omega_0$, mas certamente você não pode dizer que $\omega - \omega_0 \approx 0$.)

3. Considere um oscilador amortecido, com frequência natural ω_0 e constante de amortecimento β, ambos fixados, que é forçado pela força $F(t) = F_0 cos(\omega t)$.
(a) Calcule a taxa $P(t)$ com a qual a força $F(t)$ realiza trabalho e mostre que seu valor médio $< P >$ ao longo de qualquer número de ciclos completos é $m\beta\omega^2 A^2$.
(b) Verifique que este valor é igual à taxa média com que energia é dissipada pela força de arrasto.
(c) Mostre que, se variarmos $\omega, < P >$ será máximo quando $\omega = \omega_0$; isto é, que a ressonância na potência ocorre sempre quando $\omega = \omega_0$ e este é um resultado exato.

4. Um raio de luz vai de um ponto P_1 num meio de índice de refração n_1 até um ponto P_2 num meio de índice de refração n_2, passando pelo ponto Q (cuja posição exata temos que determinar) na interface plana entre os dois meios. Mostre que:
(a) o princípio de Fermat implica em que, na trajetória seguida pelo raio de luz, Q tem que estar num plano perpendicular à interface que contenha os pontos P_1 e P_2;
(b) e que esta trajetória obedeça á lei de Snell.

(Sugestões: escolha o plano da interface como o plano xz, e escolha o eixo y passando pelo ponto P_1 de modo que suas coordenadas sejam $(0, h_1, 0)$ e que as coordenadas de P_2, situado no plano xy, sejam $(x_2, -h_2, 0)$. Chame as coordenadas de Q de $(x, 0, z)$. Calcule o tempo que a luz leva para percorrer o trajeto P_1QP_2 e mostre que este tempo é mínimo quando a coordenada z do ponto Q é nula, e o trajeto obedece à lei de Snell.)

5. De um modo geral, o integrando $f(y, y', x)$ cuja integral queremos minimizar depende de y, y' e x. Quando f é independente de uma destas variáveis, o problema pode se simplificar bastante. Nestes casos, podemos encontrar com facilidade uma constante de movimento, chamada neste contexto de uma **primeira integral** das equações de Euler-Lagrange. Esta primeira integral reduz o problema, que em geral é traduzido por uma equação diferencial de 2^a ordem, numa equação de 1^a ordem, mais fácil de resolver.
(a) Suponha que $f = f(y', x)$ não dependa de y. Prove que, neste caso, a equação de Euler-Lagrange se reduz a

$$\partial f/\partial y' = constante$$

Na mecânica Lagrangeana, veremos que esta simplificação ocorre sempre que uma componente do

momento se conserva.
(b) Suponha agora que $f = f(y, y')$ não dependa da variável independente x. Prove que, neste caso,

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y''.$$

Em seguida, use a equação de Euler-Lagrange para substituir $\partial f / \partial y$ do lado direito e mostre portanto que

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right).$$

Prove que este resultado nos dá imediatamente uma primeira integral dada por

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = constante.$$

Este resultado pode simplificar muitos cálculos. Na mecânica Lagrangeana, onde a variável independente é o tempo t, o resultado correspondente a este é que, se a função Lagrangeana for independente de t, então a energia é conservada.