

## Cap 9. Mecânica em referenciais não-inerciais

As leis de Newton só são válidas em referenciais inerciais. Há, no entanto ocasiões em que seria desejável ter-se uma descrição do movimento em referencial não inercial:

- movimento de corpo que cai em vagão acelerado
- o referencial ligado à Terra é, para muitas finalidades, um "bom" referencial inercial; para outras, não: foguete de longo alcance, e outras...

### 9.1 Aceleração sem rotação

Considere referencial inercial  $S_0$  e outro  $S$  que acelera em relação a  $S_0$  com aceleração  $\vec{A}$  (não necessariamente constante) e velocidade  $\vec{V}$ ,  $\vec{A} = \dot{\vec{V}}$ , e bola de massa  $m$  em movimento. Com relação a  $S_0$ ,  $m \ddot{\vec{r}}_0 = \vec{F}$ ,  $\vec{r}_0$  sendo a posição da bola relativa a  $S_0$  e  $\vec{F}$  a resultante das forças que agem sobre ela.

Seja  $\vec{r}$  a posição da bola relativa a  $S$ ; sua velocidade em  $S$  é  $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 - \vec{V}$  (transformação de Galileu), e

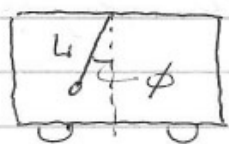
$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_0 - \vec{A}$$

$\Rightarrow m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} - m \vec{A}$ , que tem a mesma forma que a 2ª lei em referencial inercial exceto pelo aparecimento do termo  $-m\vec{A}$  do lado direito.

Ele não é uma força no sentido Newtoniano (quem faz?) - vamos chamá-lo de força inercial ("fictícia");

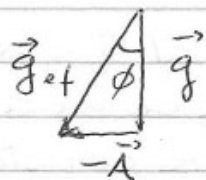
$\vec{F}_{\text{inercial}} = -m\vec{A}$ , que deve lhe soar familiar - seus "efeitos" são sentidos quando você está num avião que acelera para a decolagem, num ônibus que freia bruscamente, num carro que faz uma curva acentuada.

Exemplo: pêndulo num carro acelerado



Em  $S_0$ :

$$\vec{F} = \vec{T} + m\vec{g}, \quad \vec{F} = m\vec{A}$$



Em  $S$ :

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{T} + m\vec{g} - m\vec{A}$$

$$= \vec{T} + m(\vec{g} - \vec{A})$$

Se o pêndulo está em <sup>equilíbrio</sup> repouso  $\vec{g}_{\text{ef}}$

(em  $S$ ),  $\ddot{\vec{r}} = 0$  e  $\vec{T} = -m\vec{g}_{\text{ef}}$

$$\phi_{\text{eq}} = \text{arc tg}\left(-\frac{A}{g}\right)$$

(princípio de equivalência e relat. geral)

## 9.2 As marés

Uma aplicação interessante da ideia acima é a explicação do fenômeno das marés, que são o resultado da atração gravitacional diferencial da Lua e do sol sobre as massas oceânicas (mas não só elas), que provoca protuberâncias no nível dos oceanos. A ação da Lua é +

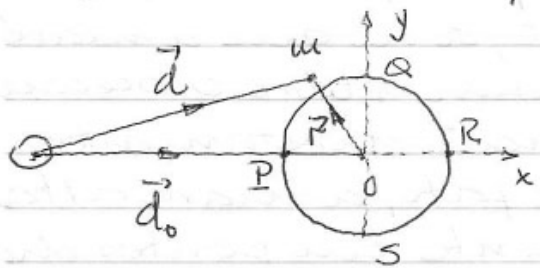
importante neste caso, e vamos começar por ignorar a contribuição do Sol e supor que os oceanos cobrem toda a superfície do planeta.

O fato de haverem 2 marés altas por dia descarta uma explicação aparentemente razoável do fenômeno, a de que a maré sobe pela atração lunar sobre o oceano apenas naquela porção diretamente "abaixo" da Lua. De fato, a maré alta ocorre simultaneamente em pontos diametralmente opostos da superfície terrestre. (figuras)

O efeito dominante da atração lunar é dar a todo o planeta, incluindo os oceanos, uma aceleração  $\vec{A}$  dirigida para a Lua - de fato, para o CM do sistema Terra-Lua -, uma aceleração centrípeta que é quase exatamente igual à produzida como se toda a massa de nosso planeta estivesse concentrada em seu centro. No entanto, objetos do lado voltado para a Lua sofrem uma atração um pouco maior do que se estivessem em seu centro, enquanto a ~~sobre~~ objetos do lado oposto é um pouco menor. Portanto, vistos de um referencial fixo na Terra, os primeiros têm uma aceleração adicional enquanto os segundos a têm de menos, como se fossem ligeiramente repelidos pela Lua.

Vamos tomar quantitativo este raciocínio. As forças sobre um objeto de massa  $m$  próximo à superfície terrestre são:

- (i) a atração gravitacional da Terra,  $m\vec{g}$
- (ii) a da Lua,  $-G M_L m \frac{\hat{d}}{d^2}$



- (iii) a resultante das demais forças não gravitacionais  $\vec{F}_{ng}$  (empuxo, por exemplo)

A aceleração do centro da Terra,  $O$ , é  $\vec{A} = -G M_L \frac{\hat{d}_0}{d_0^2}$

Escrevendo a lei de Newton no referencial terrestre (acelerado) resulta

$$m\vec{\ddot{r}} = \vec{F} - m\vec{A} = (m\vec{g} - G M_L m \frac{\hat{d}}{d^2} + \vec{F}_{ng}) + G M_L m \frac{\hat{d}_0}{d_0^2}$$

$$m\vec{\ddot{r}} = m\vec{g} + \vec{F}_{mané} + \vec{F}_{ng}, \text{ onde}$$

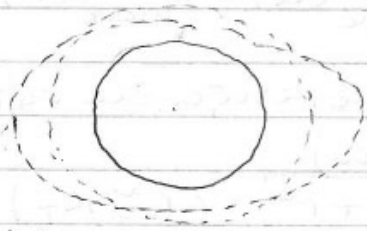
$$\vec{F}_{mané} = -G M_L m \left( \frac{\hat{d}}{d^2} - \frac{\hat{d}_0}{d_0^2} \right)$$

é a diferença entre a força de atração lunar na posição real de  $m$  e a que existiria se  $m$  estivesse no centro da Terra  $O$ .

Todo o efeito da Lua no movimento (relativo à Terra) de qualquer objeto próximo à Terra está contido em  $\vec{F}_{mané}$ . Num ponto de frente para a Lua, como  $P$ ,

os vetores  $\vec{d}$  e  $\vec{d}_0$  têm a mesma direção (e sentido), mas  $d_0 > d$  - portanto o 1º termo de  $F_{\text{maré}}$  domina e  $\vec{F}_{\text{maré}}$  aponta para a Lua. Em R, outra vez  $\vec{d}$  e  $\vec{d}_0$  têm a mesma direção, mas agora  $d > d_0$  e  $\vec{F}_{\text{maré}}$  apontará para longe da Lua. No ponto Q,  $\vec{d}$  e  $\vec{d}_0$  têm direções diferentes; as componentes  $x$  dos 2 termos de  $F_{\text{maré}}$  praticamente se cancelam, mas só o primeiro tem componente  $y$  - portanto, em Q (e S),  $\vec{F}_{\text{maré}}$  aponta para o centro da Terra (O). Pondo isso todo junto, resulta a distorção da superfície livre dos oceanos ilustrada abaixo (com enorme exagero!).

Lua  
O



### Altura das marés

A maneira + simples de encontrar a diferença de alturas entre as marés alta e baixa é observar que a superfície do oceano é uma equipotencial. Para demonstrar isto, considere uma gota de água na superfície do oceano. Ela está em equilíbrio (em relação ao referencial terrestre) sob a ação de 3 forças: a atração gravitacional terrestre  $m\vec{g}$ , a força de maré  $\vec{F}_{\text{maré}}$  e a força (derivada de pressão)  $\vec{F}_p$  da água do oceano que a

circunda (é o empuxo). Como a gota está em equilíbrio,  $m\vec{g} + \vec{F}_{\text{maré}}$  é perpendicular à superfície, já que  $\vec{F}_p$  o é. Como ambas são conservativas,

$$m\vec{g} = -\nabla U_{gT} \quad \text{e} \quad \vec{F}_{\text{maré}} = -\nabla U_{\text{maré}},$$

com  $U_{\text{maré}} = -GM_L m \left( \frac{1}{d} + \frac{x}{d_0^2} \right)$

Como  $m\vec{g} + \vec{F}_{\text{maré}}$  é perpendicular à superfície do oceano,  $\nabla(U_{gT} + U_{\text{maré}})$  também é, e  $U = U_{gT} + U_{\text{maré}}$  é constante ao longo da superfície. (cqd)

Por isso,

$$U(P) = U(Q)$$

$$\Rightarrow \underbrace{U_{gT}(P) - U_{gT}(Q)} = U_{\text{maré}}(Q) - U_{\text{maré}}(P)$$

$mgh$  ( $h$  é a diferença de alturas procurada)

No ponto Q,  $d = \sqrt{d_0^2 + r^2}$  ( $r \approx R_T$ ) e  $x = 0$

$$\Rightarrow U_{\text{maré}}(Q) = -GM_L m \frac{1}{\sqrt{d_0^2 + r^2}} =$$

$$= -\frac{GM_L m}{d_0} \left( 1 + \left[ \frac{r}{d_0} \right]^2 \right)^{-1/2} \approx -\frac{GM_L m}{d_0} \left( 1 - \frac{R_T^2}{2d_0^2} \right)$$

Em P,  $d = d_0 - R_T$  e  $x = -R_T$

$$\Rightarrow U_{\text{maré}}(P) = -\frac{GM_L m}{d_0} \left( 1 + \frac{R_T^2}{d_0^2} \right) \quad (= U_{\text{maré}}(R))$$

$$\Rightarrow mgh = \frac{GM_L m}{d_0} \cdot \frac{3R_T^2}{2d_0^2} ;$$

$$\text{como } g = \frac{GM_T}{R_T^2}, \quad h = \frac{3}{2} \frac{M_L}{M_T} \frac{R_T^2}{d_0^3}$$

$$R_T = 6,37 \times 10^6 \text{ m}, \quad M_L = 7,35 \times 10^{22} \text{ kg}, \quad M_T = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg},$$

$$d_0 = 3,84 \times 10^8 \text{ m}$$

Resulta  $h = 54 \text{ cm}$  (devido somente à Lua).

A maré causada pelo Sol sozinho é também calculada por expressão similar (com  $M_s = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$  no lugar de  $M_2$  e  $d_0 = 1,495 \times 10^{11} \text{ m}$ ), resultando em  $h = 25 \text{ cm}$  (Sol sozinho) - menor que o efeito lunar, mas não desprezível, e os 2 efeitos se combinam de maneira interessante:

- quando Terra, Sol e Lua estão aproximadamente alinhados (luas cheia ou nova), as forças de maré se somam e podemos prever marés muito altas, com  $h = 54 + 25 = 79 \text{ cm}$

- quando os 3 formam triângulo retângulo, os 2 efeitos se subtraem, e  $h = 54 - 25 = 29 \text{ cm}$ .

A teoria que apresentamos está basicamente correta, especialmente para locais no meio dos oceanos, mas as situações reais envolvem outras complicações intrigantes. Talvez a + importante delas seja o efeito das massas continentais, que podem afetar nossas conclusões (obtidas na hipótese dos oceanos cobrirem todo o planeta) resultando em marés ora menores, ora maiores, do que previmos. Mares interiores como o Mar Negro e o Mediterrâneo, têm marés menores, enquanto marés

que se movem em oceanos grandes podem ser bloqueadas pelos continentes que os margeiam e alcançar alturas bem maiores.

-01/06/09-

### 9.3 O vetor velocidade angular

No resto deste capítulo vamos discutir o movimento de objetos como vistos em referenciais que giram (em relação a algum referencial inercial). Antes disso, e como preparação, vamos discutir alguns conceitos e fixar notações para manusear rotações adequadamente.

Um estudo detalhado das rotações é surpreendentemente complexo, mas aqui não vamos precisar de muitos destes detalhes, e algumas propriedades difíceis de demonstrar (rigorosamente) são razoavelmente plausíveis e podem ser aceitas e enunciadas sem demonstração.

Os eixos girantes que consideraremos serão quase sempre fixos em relação a um corpo rígido. O exemplo + importante é um conjunto de eixos fixos em relação à Terra em rotação, mas veremos outros exemplos no capítulo 10. Quando discutirmos a rotação de um corpo rígido, só existem 2 situações diferentes que devemos considerar:

- algumas vezes o corpo gira em



torso de um ponto seu que é fixo (em algum referencial inercial); por exemplo, uma roda que gira em torno de um eixo fixo, ou um pêndulo que gira em torno de seu ponto de suspensão.

- se o corpo girante não tem nenhum ponto fixo (uma bola que gira enquanto viaja em direção ao gol), usualmente procederemos em 2 passos:

- (i) determinamos o movimento do CM;
- (ii) analisamos o movimento rotacional do corpo em relação ao CM.

Assim que fixarmos a atenção no 2º passo, estaremos de fato examinando o movimento num referencial no qual o CM está fixo, retornando então à 1ª situação.

O resultado + importante relativo a um corpo que gira em torno de um ponto fixo é o teorema de Euler: o movimento + geral possível de um corpo em relação a 1 ponto fixo  $O$  é uma rotação em torno de algum eixo (que pode mudar com o tempo) que passa por  $O$ .

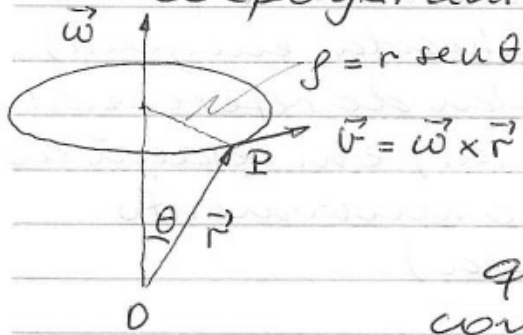
Apesar de ter uma demonstração complicada, este teorema deve parecer muito natural - vamos aceitá-lo, adiando a demonstração para a disciplina seguinte.

O teorema implica que, para especificar uma rotação em torno de um ponto dado  $O$ , basta dar a direção do eixo em torno do qual ela se deu e o ângulo de que o corpo girou. Na verdade, focaremos sobretudo a taxa de rotação, ou velocidade angular, e o teorema de Euler implica que ela pode ser especificada pela direção do eixo de rotação ( $\hat{u}$ ) e a taxa de rotação em torno deste eixo. ( $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ ). Por exemplo, um carrossel pode estar girando em torno de um eixo vertical ( $\hat{u}$  é vertical) a uma taxa de 10 rad/min ( $\omega = 10 \text{ rad/min}$ ).

É muitas vezes conveniente combinar estes 2 elementos para formar o vetor velocidade angular  $\vec{\omega} = \omega \hat{u}$ , e o vetor  $\vec{\omega}$  especifica ao mesmo tempo a direção do eixo de rotação ( $\hat{u} = \frac{\vec{\omega}}{\omega}$ ) e a taxa de rotação ( $\omega = |\vec{\omega}|$ ). Para retirar a ambiguidade na especificação do sentido de  $\vec{\omega}$  usamos a regra da mão direita.

É importante reconhecer que  $\vec{\omega}$  pode variar com o tempo, em módulo e/ou direção (exemplo: a espaçonave descontrolada do filme Apolo XIII) -  $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ . Há, por outro lado, situações interessantes nas quais  $\vec{\omega}$  é constante - isto é verdade, com grande precisão, para o movimento de rotação da Terra em torno de seu eixo.

- Taxa de variação de vetor fixo em um corpo girante



Seja  $P$  ponto fixo no corpo girante  $\Rightarrow$  seu movimento é circular (ainda que instantaneamente),

com raio  $\rho = r \sin \theta$  e  $v = \omega \rho = \omega r \sin \theta$

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Este resultado é + geral: se  $\vec{e}$  é um vetor fixo no corpo girante,

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e}$$

- Soma de velocidades angulares

Sejam

$\vec{v}_{21}^{\rightarrow}$ : velocidade do referencial 2 em relação ao " 1;

$\vec{v}_{32}^{\rightarrow}$ : velocidade do corpo 3 em relação ao referencial 2;

$\vec{v}_{31}^{\rightarrow}$ : " , referencial 1 :

Então,

$$\vec{v}_{31}^{\rightarrow} = \vec{v}_{32}^{\rightarrow} + \vec{v}_{21}^{\rightarrow} \quad (\text{transformação de Galileu})$$

Sejam  $\vec{\omega}_{31}$ ,  $\vec{\omega}_{32}$  e  $\vec{\omega}_{21}$  definidas de forma similar; então, qualquer que seja  $\vec{r}$  (ponto  $P$ ),

$$\vec{\omega}_{31} \times \vec{r} = \vec{\omega}_{32} \times \vec{r} + \vec{\omega}_{21} \times \vec{r} = (\vec{\omega}_{32} + \vec{\omega}_{21}) \times \vec{r}$$

$$\vec{\omega}_{31} = \vec{\omega}_{32} + \vec{\omega}_{21}$$

Notações:

$\vec{\omega}$ : velocidade angular do corpo de interesse (desconhecida, em geral)

$\vec{\Omega}$ : velocidade angular do referencial girante (não inercial) em relação ao qual observamos o movimento. (em geral conhecida)

9A Derivadas temporais em referencial girante.

Seja  $S$  referencial que gira com  $\vec{\Omega}$  em relação a  $S_0$  inercial ( $\Omega_{\text{Terra}} \approx \frac{2\pi}{24 \times 3600} \approx 7,3 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$ ), ambos com origem comum no ponto  $O$ .

$\Rightarrow$  o único movimento de  $S$  em relação a  $S_0$  é rotação com  $\vec{\Omega}$ . (Exemplo:  $S$  é referencial fixo em relação à Terra -  $S$  é conveniente mas não inercial,  $S_0$  é inconveniente mas inercial)

Seja  $\vec{Q}$  um vetor arbitrário (posição ou velocidade da bola, força resultante sobre um objeto). Vamos relacionar a taxa de variação de  $\vec{Q}$  medida em  $S_0$  com a medida em  $S$ .

$\vec{Q} = \sum_i Q_i \hat{e}_i$ ,  $\hat{e}_i$  unitários ortogonais fixos em  $S$ . Observador em  $S_0$  vê os  $\hat{e}_i$  girando. Em  $S$ ,

$$\left( \frac{d\vec{Q}}{dt} \right)_S = \sum_i \frac{dQ_i}{dt} \hat{e}_i$$

Como os  $Q_i$  são os mesmos em  $S$  e  $S_0$ , nós criaremos notação especial para

$$\frac{dQ_i}{dt}$$

Em  $S_0$ ,

$$\left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_{S_0} = \sum_i \frac{dQ_i}{dt} \hat{e}_i + \sum_i Q_i \left(\frac{d\hat{e}_i}{dt}\right)_{S_0}$$

Mas  $\left(\frac{d\hat{e}_i}{dt}\right)_{S_0} = \vec{\omega} \times \hat{e}_i$

$$\Rightarrow \sum_i Q_i \left(\frac{d\hat{e}_i}{dt}\right)_{S_0} = \sum_i Q_i (\vec{\omega} \times \hat{e}_i) = \vec{\omega} \times \vec{Q}$$

Finalmente,

$$\left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_{S_0} = \left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_S + \vec{\omega} \times \vec{Q}$$

### 9.5 Segunda lei de Newton no referencial girante

Vamos supor aqui que  $\vec{\omega}$  seja constante (se  $\vec{\omega}$  é constante em 1 referencial, é constante no outro, já que  $\vec{\omega} \times \vec{\omega} = 0$ )

Considere partícula de massa  $m$  e posição  $\vec{r}$ . Em  $S_0$ ,

$$m \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{S_0} = \vec{F} \quad (\text{resultante})$$

Mas  $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{S_0} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S + \vec{\omega} \times \vec{r}$  ;

$$\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{S_0} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{S_0} \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{S_0} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{S_0} \left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S + \vec{\omega} \times \vec{r}\right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{S_0} = \left(\frac{d}{dt}\right)_S \left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S + \vec{\omega} \times \vec{r}\right] + \vec{\omega} \times \left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S + \vec{\omega} \times \vec{r}\right]$$

Para ter resultado + limpo, uso a notação  $\dot{\vec{Q}} = \left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_S$  ; lembre  $\vec{\omega} = \text{constante}$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{S_0} = \ddot{\vec{r}} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

e a 2ª lei vista em  $S$  se escreve

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \underbrace{2m \dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega}}_{\text{força de Coriolis}} + \underbrace{m (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega}}_{\text{força centrífuga}}$$

$$\text{ou } m \ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{Cor}} + \vec{F}_{\text{cf}}$$

- 03/06/09 -

### 9.6 A força centrífuga

Vamos examinar, até onde possível, estas 2 forças inerciais separadamente. Em particular, a força de Coriolis é proporcional à velocidade do objeto  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$  relativa ao referencial girante - ela é, portanto, nula para um objeto em repouso neste referencial e desprezível para objetos que se movam lentamente.

Vamos focalizar prioritariamente no resto do capítulo o referencial girante solidário à Terra, no qual podemos facilmente estimar a importância relativa destas 2 forças inerciais.

Elas dependem da direção de vários vetores - são obtidas por produtos vetoriais - mas para uma estimativa de ordem de grandeza podemos tomar

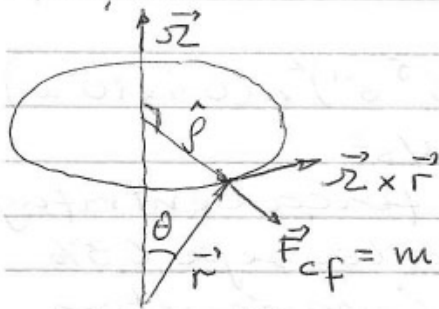
$$F_{\text{Cor}} \sim m v \Omega \quad \text{e} \quad F_{\text{cf}} \sim m r \Omega^2,$$

onde  $v$  é a velocidade observada no referencial da Terra (girante); portanto,

$$\frac{F_{\text{Cor}}}{F_{\text{cf}}} \sim \frac{v}{R \Omega} = \frac{v}{V}$$

no referencial inercial, de ponto no equador terrestre ( $\sim 1600 \text{ km/h}$ ), que mostra

que, para projéteis com  $v \ll 1600 \text{ km/h}$  um bom ponto de partida é ignorar a força de Coriolis, o que faremos nesta seção.



Na latitude  $\theta$ :

$\vec{\Omega} \times \vec{r}$ : velocidade vista no ref. inercial é tangente ao círculo,

$$|\vec{F}_{cf}| = \sqrt{m^2 \Omega^2 r^2 \sin^2 \theta} = m \Omega^2 \rho, \quad \text{e } \vec{F}_{cf} \parallel \hat{p}$$

$$\text{ou } \vec{F}_{cf} = m \Omega^2 \rho \hat{p}$$

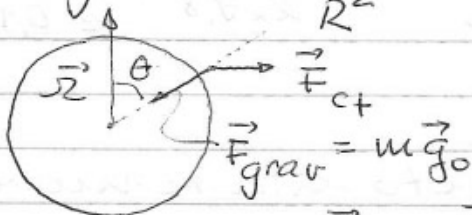
Se  $\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$  é a velocidade vista no ref. inercial,  $F_{cf} = \frac{mv^2}{\rho}$

- Aceleração de queda livre  $\rightarrow$  quando  $\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{cor} = 0$

É a aceleração inicial  $\vec{g}$ , relativa à Terra, de objeto abandonado do repouso (no vácuo) próximo à superfície da Terra. A eq. de movimento no referencial da Terra é

$$m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{grav} + \vec{F}_{cf}, \text{ com}$$

$$\vec{F}_{grav} = -\frac{GMm}{R^2} \hat{r} = m \vec{g}_0 \text{ e } \vec{F}_{cf} = m \Omega^2 \rho \hat{p}$$



a "verdadeira" aceleração da gravidade

$$\Rightarrow \vec{F}_{ef} = \vec{F}_{grav} + \vec{F}_{cf} = m \vec{g}' = m \vec{g}_0 + m \Omega^2 \rho \hat{p}$$

$$\Rightarrow \vec{g}' = \vec{g}_0 + \Omega^2 R \sin \theta \hat{p}$$

A componente radial de  $\vec{g}$  é

$$g_{\text{rad}} = g_0 - \Omega^2 R \sin^2 \theta \quad (\text{na direção de } -\hat{r})$$

No equador (colatitude  $\pi/2$ ) o termo centrífugo é máximo:

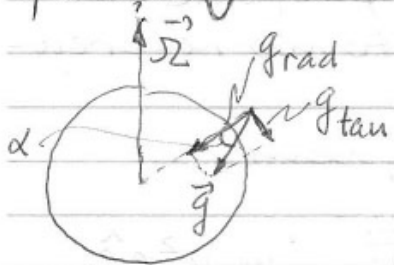
$$\Omega^2 R = (7,3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1})^2 \times (6,4 \times 10^6 \text{ m}) \approx 0,034 \text{ m/s}^2$$

Como  $g_0 \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ , a força centrífuga faz com que  $g$  no equador seja 0,3% menor que nos polos (gravímetros modernos têm precisão de 1 em  $10^9$ )

A componente tangencial de  $\vec{g}$  é um efeito puramente centrífugo:

$$g_{\text{tang}} = \Omega^2 R \sin \theta \cos \theta$$

(zero nos polos e no equador, máximo em  $\theta = \pi/4$ ), e faz com que a aceleração de queda livre não tenha exatamente a direção da força gravitacional:



$$\text{tg } \alpha \approx \alpha \approx \frac{g_{\text{tang}}}{g_{\text{rad}}}$$

com valor máximo

em  $\theta = \pi/4$  igual a

$$\alpha_{\text{max}} = \frac{\Omega^2 R / 2}{g_0} \approx \frac{0,034}{2 \times 9,8} \approx 1,7 \times 10^{-3} \text{ rad} \approx 0,1^\circ$$

## 9.7 A força de Coriolis

Quando um objeto está se movendo no referencial girante, aparece uma segunda força inercial

$$\vec{F}_{\text{cor}} = 2m \vec{v} \times \vec{\Omega} = 2m \vec{v} \times \vec{\Omega}$$



onde  $\vec{v}$  é relativa ao referencial girante. Observe o paralelo entre esta força e a força magnética sobre carga em movimento ( $q\vec{v} \times \vec{B}$ ), que não tem grande significado mas pode ajudar a visualizar como a força de Coriolis afeta o movimento.

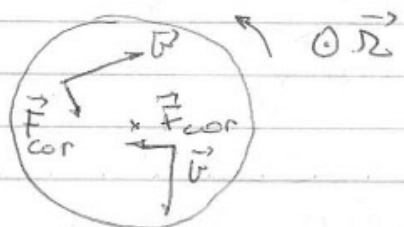
O módulo de  $\vec{F}_{\text{cor}}$  depende dos módulos e direções de  $\vec{v}$  e  $\vec{\Omega}$ . Para o referencial solidário à Terra e objeto com  $v \approx 50 \text{ m/s}$ , a aceleração máxima que ela pode produzir (quando  $\vec{v} \perp \vec{\Omega}$ ) é

$$a_{\text{max}} = 2v\Omega \approx 2 \times (50 \text{ m/s}) \times (7,3 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}) \approx 7 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2,$$

que é muito pequena quando comparada a  $g_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$ . Foguetes e mísseis de longo alcance têm velocidades bem maiores que  $50 \text{ m/s}$ , e para eles o efeito da força de Coriolis é + importante. Além disso veremos que há sistemas, como o pêndulo de Foucault, nos quais a força de Coriolis, apesar de muito pequena, pode agir por um longo tempo e, por isto, produzir efeitos grandes.

### Direção da força de Coriolis

$\vec{F}_{\text{cor}}$  é sempre perpendicular a  $\vec{v}$

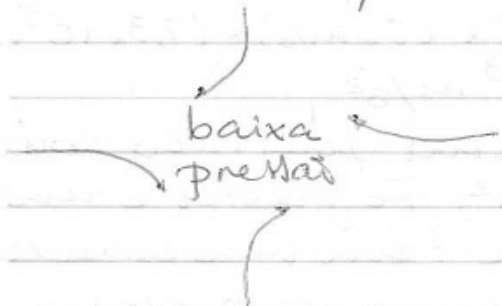


No exemplo do diagrama,  $\vec{F}_{\text{cor}}$  sempre quer desviar  $\vec{v}$  para sua direita (hemisfério

(11)  
 fénio norte visto do polo norte). No hemisfério sul - visto do polo sul - tendência a defletir para a esquerda.

Este efeito é importante para a artilharia de longo alcance, que deve sempre mirar à esquerda de seu alvo no hemisfério norte.

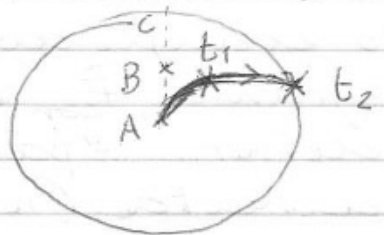
Um exemplo importante deste efeito na meteorologia é o fenômeno dos ciclones, que ocorrem quando o ar ao redor de uma região de <sup>baixa</sup> ~~alta~~ pressão se move rapidamente para dentro dela:



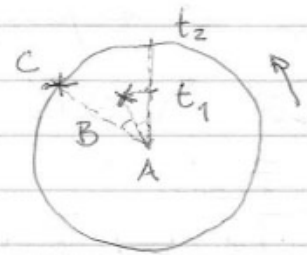
no hemisfério norte, o ar circula no sentido trigonométrico.

É importante lembrar que as forças centrífuga e de Coriolis são, no fundo, efeitos cinemáticos que aparecem quando insistimos em usar um referencial (não inercial) girante.

Exemplo: movimento simples sobre o prato de um toca-discos (problema da lista 1!)



(a) ref. girante



(b) ref. inercial

A força resultante (como vista no ref. inercial) é nula. No ref. girante, as 2 únicas forças são a centrífuga e a de Coriolis. A primeira é sempre radial para fora e não interfere na deflexão. A segunda deflete a velocidade para a direita, e faz o objeto seguir a trajetória curva vista em (a). No instante  $t_1$ , quando alcança o raio de B, está a uma pequena distância à direita de B, e no instante  $t_2$ , quando chega à borda do prato, está ainda mais para a direita de C (4 vezes mais, se  $t_2 = 2t_1$ )

No ref. inercial, a força resultante é nula e o objeto segue trajetória reta. No instante  $t_1$ , quando alcança B, este girou para a esquerda - e o mesmo para C. Visto do objeto em movimento, B e C se moveram para a esquerda. Portanto, visto de B e C, o objeto teve sua trajetória encurvada para a direita.

### 9.8 Queda livre e a força de Coriolis

Considere objeto caindo no vácuo próximo a um ponto  $\vec{R}$  da superfície terrestre. A eq. de movimento é

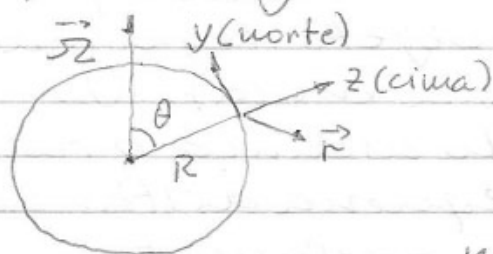
$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{F}_{cf} + \vec{F}_{cor}$$

$$\vec{F}_{cf} = m(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{\omega}; \text{ mas } \vec{r} \approx \vec{R}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{cf} \approx m(\vec{\omega} \times \vec{R}) \times \vec{\omega}$$

$$m\vec{g}_0 + \vec{F}_{cf} = m\vec{g} \quad (\vec{g} \text{ é o observado em } \vec{R})$$

$\Rightarrow \ddot{\vec{r}} = \vec{g} + 2\dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega}$ , equações que não envolve  $\vec{r}$ , apenas suas derivadas e não é, portanto, alterada por uma mudança de origem. Vamos pô-la na posição  $\vec{R}$ ,



escolher os eixos como indicado na figura, e decompor a eq. de movimento nas componentes.

$$\dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

$$\vec{\Omega} = (0, \Omega \sin \theta, \Omega \cos \theta)$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega} = (\dot{y}\Omega \cos \theta - \dot{z}\Omega \sin \theta, -\dot{x}\Omega \cos \theta, \dot{x}\Omega \sin \theta)$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{x} = 2\Omega (\dot{y} \cos \theta - \dot{z} \sin \theta)$$

$$\ddot{y} = -2\Omega \dot{x} \cos \theta$$

$$\ddot{z} = -g + 2\Omega \dot{x} \sin \theta$$

Vamos resolver estas 3 equações recorrendo a uma sequência de aproximações relacionadas com o pequeno módulo de  $\Omega$ .

Em ordem zero, ignoramos  $\Omega$ :

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = -g$$

que são as equações do movimento de queda livre resolvidas na Física básica. Se o objeto cai a partir do repouso do ponto  $x=y=0$  e  $z=h$ ,  $x(t)=y(t)=0$  e  $\dot{z} = -gt \Rightarrow z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$ , que é nossa solução nesta aproximação - muito boa em geral, por sinal!

A próxima aproximação - em ordem 1 - consiste em usar o resultado na ordem anterior do lado <sup>direito</sup> ~~esquerdo~~ das eq. de movimento completas:

$$\ddot{x} = 2\Omega g t \sin\theta$$

$$\ddot{y} = 0$$

$$\ddot{z} = -g$$

As 2 últimas são as mesmas que em ordem zero; a 1ª é nova, com solução

$$x(t) = \frac{1}{3} \Omega g t^3 \sin\theta,$$

e vamos parar nesta ordem de aproximação.

O curioso fato que resulta da solução é que um objeto em queda livre não cai na vertical! Ao invés disso, a força de Coriolis provoca na trajetória uma (leve) curvatura para leste (x positivo). Para ter uma idéia do tamanho deste efeito, considere um objeto que caia num poço de 100 m de profundidade no Equador. O tempo de queda é

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

na queda é

$$x = \frac{1}{3} \Omega g \left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 2,2 \text{ cm},$$

pequena, mas observável. Quem primeiro previu este efeito foi Newton (que surpresa, não é ??!) e ele foi verificado por seu rival científico Robert Hooke (1635-1703), mas a explicação correta teve que esperar compreendermos a força e o efeito de Coriolis.

Podemos explicar o efeito olhando-o de um referencial inercial, no qual o objeto começa sua queda com uma velocidade tangencial para o leste, que é maior que a de um ponto da superfície onde vai cair - a distância ao eixo de rotação é maior. Quantitativamente:

- esta velocidade inicial é  $(R+h)\Omega \sin\theta$  e a diferença instantânea ~~entre esta~~ velocidade ~~do~~ do ponto - do referencial girante - por onde passa o objeto é

~~$$\Delta v_{\text{relativo}} = \frac{1}{2} g t^2 \Omega \sin\theta$$~~

e a velocidade do ponto de queda é

$$\Delta v = z \Omega \sin\theta$$

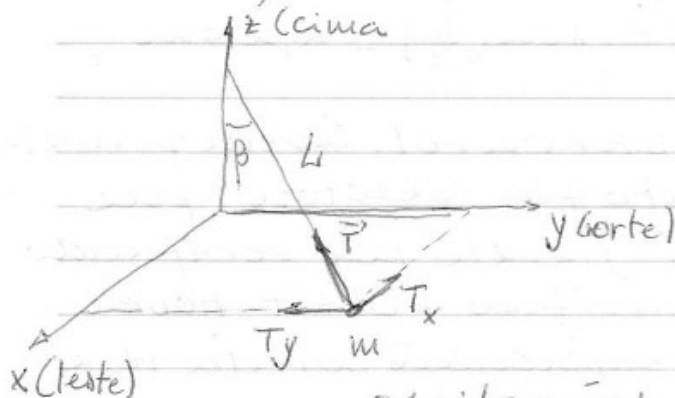
$$\Rightarrow \Delta x = \int_0^t z \Omega \sin\theta dt' =$$

$$= \Omega \sin\theta \int_0^t (h - \frac{1}{2} g t'^2) dt' =$$

$$= \Omega \sin\theta \left[ h t - \frac{1}{3} g t^2 \frac{t}{3} \right] = \Omega \sin\theta \cdot \frac{1}{2} g t^2 \cdot \frac{2t}{3}$$

$$= \frac{g t^3}{3} \Omega \sin\theta$$

### 9.9. O pêndulo de Foucault (1819-1868)



No mesmo referencial (girante) que usamos no problema anterior, consideraremos pequenas oscilações ( $\beta \ll 1$ ).

A eq de movimento,

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{T} + m\vec{g}_0 + m(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega} + 2m\dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega}$$

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{T} + m\vec{g} + 2m\dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega} \quad (\vec{g} \parallel -\hat{z})$$

$$\beta \ll 1 \Rightarrow T_z = T \cos \beta \approx T, \quad e \\ T_z \approx mg \quad (\dot{\vec{r}} \text{ e } \ddot{\vec{r}} \text{ pequenos}) \\ \Rightarrow T = mg$$

As componentes

$$\frac{T_x}{T} = -\frac{x}{L}, \quad \frac{T_y}{T} = -\frac{y}{L} \quad (\text{semelhança de triângulos})$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\frac{g}{L}x + 2\dot{y}\Omega \cos \theta \\ \ddot{y} = -\frac{g}{L}y - 2\dot{x}\Omega \cos \theta, \quad \text{ou,}$$

$$\text{com } \omega_0^2 = \frac{g}{L} \quad \text{e } \Omega \cos \theta = \Omega_z,$$

$$\ddot{x} - 2\Omega_z \dot{y} + \omega_0^2 x = 0 \quad (i)$$

$$\ddot{y} + 2\Omega_z \dot{x} + \omega_0^2 y = 0, \quad (ii)$$

sistema que nos dá outra oportunidade de usar o truque com números complexos:

$\eta = x + iy$ , e a representação de  $\eta$  no plano complexo nos dá uma imediata visualização (na projeção) do movimento do pêndulo sobre o plano  $oxy$ .

$$(i) + i(ii) \Rightarrow$$

$$\ddot{\eta} + 2i\Omega_z \dot{\eta} + \omega_0^2 \eta = 0,$$

eq. diferencial de 2ª ordem, linear e homogênea  $\Rightarrow$  2 soluções linearmente

independentes, que procuramos com a forma  ~~$e^{-i\omega t}$~~   $e^{-i\omega t}$ :

$$\alpha^2 - 2\Omega_2 \alpha - \omega_0^2 = 0, e$$

$$\alpha = \Omega_2 \pm \sqrt{\Omega_2^2 + \omega_0^2} \approx \Omega_2 \pm \omega_0,$$

e a solução geral é

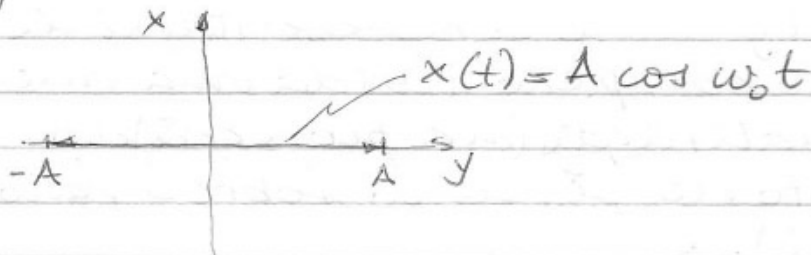
$$\eta = e^{-i\Omega_2 t} (C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t})$$

Vamos especificar condições iniciais para determinar  $C_1$  e  $C_2$ : suponha que  $x(0) = A$ ,  $y(0) = 0$ , e  $v_x(0) = v_y(0) = 0$

$$C_1 = C_2 = \frac{A}{2}, e$$

$$\eta(t) = x(t) + iy(t) = A e^{-i\Omega_2 t} \cos \omega_0 t$$

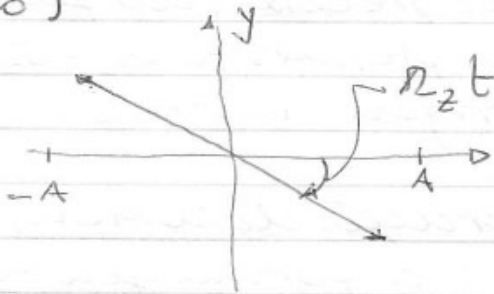
Como  $\Omega_2 \ll \omega_0$ , o termo em cosseno ~~realiza~~ muitas oscilações antes que a exponencial mude muito. Portanto, no início  $x(t)$  oscila com frequência  $\omega_0$  entre  $A$  e  $-A$ , enquanto  $y = 0$  - o pêndulo executa MHS na direção  $x$



Depois de algum tempo,  $e^{-i\Omega_2 t}$  se torna significativamente diferente de zero  $\rightarrow \eta$  gira do ângulo  $-\Omega_2 t$ .



No hemisfério norte (sul)  $\Omega_z > 0$  ( $\Omega_z < 0$ )  $\Rightarrow x + iy$  continua a oscilar graças ao termo  $\cos \omega_0 t$ , mas numa direcção que se move no sentido dos ponteiros do relógio (trigonométrico)



Isto é o plano da oscilação do pêndulo gira (lentamente) com velocidade angular  $\Omega_z = \Omega \cos \theta$ . No polo norte  $\theta = 0$  e  $\Omega_z = \Omega$  é a velocidade angular do planeta - fácil de entender, se olharmos a partir de um referencial inercial. Em outras latitudes, o resultado não é tão simples de entender - mas tentaremos daqui a pouco. No equador,  $\Omega_z = 0$  e o pêndulo não gira. Na latitude  $40^\circ$ ,  $\Omega_z = \Omega \cos 50^\circ \approx \frac{2}{3} \Omega = \frac{240^\circ}{\text{dia}}$ , e, em 6 horas, o plano do pêndulo terá girado de  $60^\circ$ , um efeito facilmente observável.

Outra forma de obter este resultado: a componente horizontal da força de Coriolis (no plano  $xy$ ) tem módulo

$$|F_{\text{Cor}}^{\text{hor}}| = |2m \vec{v} \times (\Omega \cos \theta \hat{z} + \Omega \sin \theta \hat{y})|$$

$$= 2m \Omega \cos \theta v$$

já que a componente  $y$  ~~prode~~  $\vec{\Omega}$  produz  
 força na direção  $\hat{z}$ , e  $\vec{v} \perp \vec{F}_{\text{cor}}^{\text{hor}}$ . Portanto,  
 para o pêndulo, é como se ele estivesse  
 no polo norte de um planeta fictício que  
 gira com velocidade angular  $\Omega \cos \theta$   
 $\Rightarrow$  a frequência de precessão do pêndulo  
 de Foucault é simplesmente  $\omega_F = \Omega \cos \theta$ ,  
 no sentido anti-trigonométrico.

### 9.10. Força e aceleração de Coriolis

Vimos no cap. 1 a forma que toma  
 a 2ª lei em coordenadas polares bi-  
 dimensionais:

$$\vec{F} = m \ddot{\vec{r}} \iff \begin{cases} F_r = m (\ddot{r} - r \dot{\phi}^2) \\ F_\phi = m (r \ddot{\phi} + 2 \dot{r} \dot{\phi}) \end{cases}$$

Podemos agora compreender melhor  
 os termos adicionais da aceleração em  
 termos das forças inerciais centrífuga  
 e de Coriolis.

Considere partícula sujeita à força  
 resultante  $\vec{F}$  e obrigada a se mover  
 em 2D. Com relação a um referencial  
 inercial  $S$  com origem em  $O$ , a partícula  
 deve satisfazer às equações acima.  
 Considere agora referencial não inercial  
 $S'$  com a mesma origem e que gira  
 com velocidade angular constante  $\Omega$ ,  
 escolhida de forma que  $\Omega = \dot{\phi}$  num  
 certo instante  $t_0$  - isto é, neste instante  $t_0$   
 $S'$  e a partícula têm a mesma velocidade  
 angular ( $S'$  é chamado de referencial  
 có-movente)

As coordenadas da partícula em  $S'$  são  $(r', \phi')$ , e  $r' = r$  ( $S'$  e  $S$  têm a mesma origem), enquanto, em  $t = t_0$ ,  $\phi' = 0$ . Vamos aplicar a 2ª lei em  $S'$  - para isto precisamos incluir as forças inerciais.

$$\vec{F} + \vec{F}_{cf} + \vec{F}_{cor} = m \vec{\ddot{r}}'$$

Em coordenadas polares:

-  $\vec{F}_{cf}$  é puramente radial, com componente  $r\Omega^2$

-  $\vec{F}_{cor} = 2m\vec{v}' \times \vec{\Omega}$ ; como  $\vec{v}'$  é puramente radial em  $S'$ ,  $\vec{F}_{cor}$  tem a direção de  $\hat{\phi}'$ , com componente  $-2m\dot{r}\Omega$

-  $m\vec{\ddot{r}}'$  pode ser escrito na forma do cap. 1 - mas, em  $t = t_0$ ,  $\phi' = 0$ , e os termos que o contém são nulos. Logo, em  $S'$  (e  $t = t_0$ ),

$$\vec{F} + \vec{F}_{cf} + \vec{F}_{cor} = m\vec{\ddot{r}}' \Leftrightarrow \begin{cases} F_r + m r \Omega^2 = m \ddot{r} \\ F_\phi - 2m \dot{r} \Omega = m r \ddot{\phi} \end{cases}$$

(como  $\vec{\Omega}$  é constante,  $\ddot{\phi}' = \ddot{\phi}$ ),

que são exatamente as eqs. obtidas no referencial inercial ( $\Omega = \dot{\phi}$ ), com estes termos adicionais agora posto do lado esquerdo.

Resultado:

- no referencial inercial, as forças são + simples, mas as acelerações + complicadas;
- no referencial có-movente, a complicação muda de lugar

A escolha do referencial é, pois, uma questão de conveniência. Em particular,

III

quando o observador está fixo num referencial girante (como nós!) é, em geral, + conveniente trabalhar no referencial girante e aprender a conviver com as forças inerciais (fictícias) centrífuga e de Coriolis.