

Cap. 7. ~~Estado variacional~~

As equações de Lagrange

Lagrange (1736-1813) publicou em 1788 sua versão da mecânica, que se apoia nas ideias do cálculo variacional. Esta formulação tem 2 vantagens sobre a newtoniana:

- suas equações têm a mesma forma em todos os sistemas de coordenadas
- ela elimina a necessidade de considerar as forças de vínculo

1 Nesta apresentação introdutória desta formulação, vamos tratar apenas situações nas quais as forças - que não as de vínculo - sejam conservativas, ou que, pelo menos, possam ser derivadas de uma função energia potencial (exceção feita à força sobre forças magnéticas). Esta restrição pode ser relaxada, como você verá na disciplina seguinte.

7.1 As eq. de Lagrange para movimento sem vínculo.

Considere partícula movendo-se sem vínculo em 3D, sujeita a uma força resultante conservativa $\vec{F}(\vec{r})$. Sua energia cinética é

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

e sua energia potencial $U = U(\vec{r}) = U(x, y, z)$

A função Lagrangeana é definida por

$$\mathcal{L} = T - U \quad (\neq E, \text{ energia total})$$

(porque? Não há resposta simples m)

Considere as derivadas

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = - \frac{\partial U}{\partial x} = F_x, \text{ e}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = P_x$$

Da 2ª lei, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}$ (se \mathcal{L} foi escrita em referencial inercial)

(e o mesmo para y e z)

Portanto a 2ª lei implica nas eq. de Lagrange (em coordenadas cartesianas, pelo menos) neste caso.

O raciocínio também funciona ao contrário, e mostra que as formulações são exatamente equivalentes neste caso: a trajetória determinada pela 2ª lei coincide com aquela determinada pelas eq. de Lagrange.

Isto implica em que $S = \int \mathcal{L} dt$ seja estacionária, como vimos no capítulo anterior.

Princípio de Hamilton (1805-1865).

A trajetória seguida por uma partícula entre 2 pontos 1 e 2 no intervalo de tempo (dado) $[t_1, t_2]$ é aquela que torna estacionária a integral de ação $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$.

Apesar de só termos provado isto para uma partícula em coordenadas cartesianas, veremos que o princípio é válido para uma enorme classe de sistemas mecânicos e para (quase) qualquer escolha de coordenadas.

O princípio de Hamilton foi generalizado em muitos ramos da Física - em teorias de campo, em particular - e dá unidade a diversas áreas. No século XX teve papel importante na formulação das teorias quânticas.

Vamos considerar outro ^{conjunto} sistema de coordenadas generalizadas q_1, q_2 e q_3 com a propriedade que a cada posição \vec{r} esteja associada 1 e só 1 valor de (q_1, q_2, q_3) , e vice-versa.

$$q_i = q_i(\vec{r}) \quad \text{e} \quad \vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3)$$

bijetoras.

Com estas equações de transformação de coordenadas podemos escrever (x, y, z) e $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ em termos de (q_1, q_2, q_3) e $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$, e reescrever a Lagrangeana na forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$$

e a ação

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3) dt$$

O valor de S não é alterado por esta transformação. Portanto, S continua

sendo estacionária para variações de caminho em torno da trajetória correta no novo sistema de coordenadas; portanto, a trajetória correta deve satisfazer a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i},$$

qualquer que seja o conjunto (q_1, q_2, q_3) , inclusive se forem coordenadas de um referencial inercial.

Mas cuidado: devemos primeiro escrever $\mathcal{L} = T - U$ em um referencial inercial, e depois fazer a mudança de coordenadas.

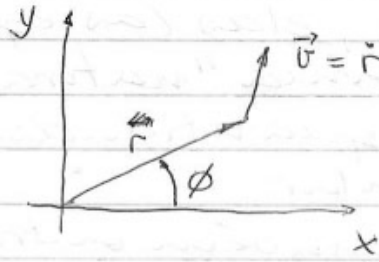
Volte a nossa demonstração inicial: em coordenadas cartesianas, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = F_x$ e $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = p_x$. Em coordenadas generalizadas, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$ não é mais uma componente q_i da força, mas seu papel é semelhante; o mesmo ocorre com $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$, e por isto chamamos estas $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$ derivadas de força generalizada e momento generalizado. Com esta nomenclatura, cada eq. de Lagrange pode ser descrita como:

força generalizada = taxa de variação do momento generalizado.

Uma e outra grandezas não tem, necessariamente, as dimensões de força e momento, como ilustra o exemplo a seguir

Exemplo: partícula em 2D (coordenadas polares)

Em todos os problemas onde usamos a mecânica Lagrangeana, nossa 1ª tarefa é escrever $\mathcal{L} = T - U$ em termos das coordenadas escolhidas.



$$\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\phi} \hat{\phi} \quad T = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} =$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2), \text{ e}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - U(r, \phi)$$

- equações para r :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m r \dot{\phi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{d}{dt} (m \dot{r}) = m \ddot{r}$$

$$- \frac{\partial U}{\partial r} = F_r \Rightarrow F_r = m (\ddot{r} - r \dot{\phi}^2) = m a_r$$

(que é apenas a componente radial da 2ª lei, sem o trabalho de derivar a_r)

- equações para ϕ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = - \frac{\partial U}{\partial \phi}; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \dot{\phi}$$

$$\Rightarrow - \frac{\partial U}{\partial \phi} = \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\phi})$$

Interpretando as equações: o gradiente em coordenadas polares é

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi} \hat{\phi}, \text{ e } F_\phi = - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi}$$

e a eq. Lagrange é $r F_{\phi} = 2(\text{orque}) =$
 $= \frac{d}{dt} L$, o momento angular
em relação à origem.

Este resultado ilustra uma característica importante das eq. Lagrange: quando escolhemos as coordenadas generalizadas apropriadas, elas (as equações) aparecem numa forma "natural", envolvendo neste caso as quantidades torque e momento angular.

O exemplo ilustra também outra característica importante: quando a força generalizada (componente i) $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, o momento generalizado correspondente $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ tem derivada temporal nula $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$, portanto, conservado. Então, se L não depende (explicitamente) de uma coordenada generalizada, temos imediatamente uma lei de conservação.

. Sistemas de muitas partículas (sem vínculo)

A extensão das ideias acima para sistema de N partículas sem vínculo (um gás de N moléculas, por exemplo) é imediata. Vamos aqui mostrar o raciocínio para $N=2$, como objetivo principal de exibir a forma das eq. de Lagrange para $N > 1$.

$$\mathcal{L}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2 - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

Como sempre, a força resultante sobre cada partícula i é $\vec{F}_i = -\nabla_i U$, e a lei de Newton aplicada a cada uma é

$$F_{1x} = \dot{p}_{1x}, \quad F_{1y} = \dot{p}_{1y}, \quad \dots, \quad F_{2z} = \dot{p}_{2z}$$

Cada uma destas é equivalente a 1 eq. Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_2} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}_2}, \quad \text{que}$$

implicam na estacionariedade da integral de ação $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$.

Mudemos agora o sistema de coordenadas para o conjunto arbitrário (e supostamente conveniente!)

q_1, q_2, \dots, q_6 . Como S deve também ser estacionária neste sistema, isto implica na veracidade das 6 eq. Lagrange,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (i=1, \dots, 6)$$

Para sistema de N partículas, resultam $3N$ eq. Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (i=1, \dots, 3N)$$

qualquer que seja a escolha das $3N$ coordenadas q_1, \dots, q_{3N} necessárias para a descrição do sistema.

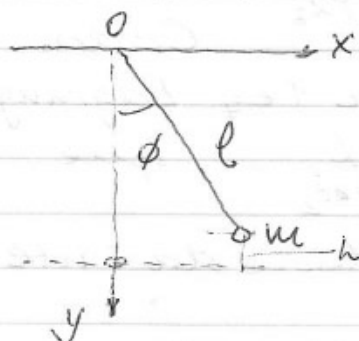
— 08/05/09 —

7.2 Sistemas com vínculo: um exemplo

Uma das maiores vantagens da abordagem Lagrangeana é sua habilidade na manipulação de sistemas com vínculos, que ~~os obrigam~~ não permiti-

Tam que ele se mova arbitrariamente no espaço (exemplo: conta em fio de arame) (outro: corpo rígido).

Considere o pêndulo simples



vínculo: $x^2 + y^2 = l^2$



sistema tem 1 grau de liberdade

Podemos eliminar, por exemplo, $y = \sqrt{l^2 - x^2}$ e exprimir tudo em função apenas de x . Mas o melhor é exprimir ambos x e y em função de um único parâmetro ϕ .

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi}^2$$

$$U = mgh = mgl(1 - \cos\phi)$$

Como a evolução do sistema deve também neste caso (com vínculo) obedecer à eq. Lagrange (como mostraremos a seguir),

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi}^2 - mgl(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -mgl \sin\theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = m l^2 \dot{\phi}$$

$$-mgl \sin\theta = \frac{d}{dt} (m l^2 \dot{\phi}) = m l^2 \ddot{\phi}$$

torque exercido pelo peso

momento de inércia

(equivale a $\mathcal{E} = I\alpha$)

7.3. Sistemas com vínculos: caso geral.

- Coordenadas generalizadas

Considere sistema arbitrário de N partículas com posições especificadas por \vec{r}_α ($\alpha=1, \dots, N$). Os parâmetros q_1, \dots, q_n são um conjunto de coordenadas generalizadas deste sistema se

$$\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q_1, \dots, q_n, t) \quad (\alpha=1, \dots, N)$$

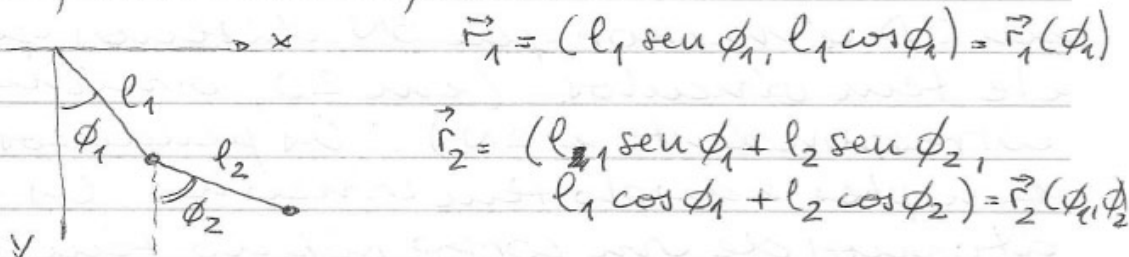
e se $n \leq 3N$ é o menor número que possibilite esta descrição.

Para um sistema com vínculos, $n \leq 3N$; para corpo rígido ($N \approx 10^{23}$, $n=6$: 3 coordenadas do CM + 3 para determinar sua orientação)

Exemplos:

- pêndulo simples: $\vec{r} = (x, y) = (l \sin \phi, l \cos \phi)$
 $\phi = \text{tg}^{-1} \left(\frac{x}{y} \right)$

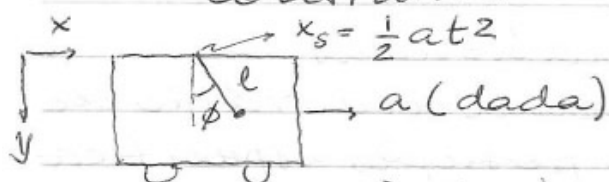
- pêndulo duplo



Nestes 2, as transformações de coordenadas não envolvem o tempo t - neste caso, ~~o~~ o conjunto de coordenadas generalizadas é dito natural.

(felizmente o + conveniente em muitos casos)

- pêndulo em vagão com aceleração constante



$$\vec{r} = (x, y) = \left(\frac{1}{2} at^2 + l \sin \phi, l \cos \phi \right) = \vec{r}(\phi, t)$$

- Graus de liberdade

É o número de coordenadas que podem ser variadas independentemente num pequeno deslocamento - o número de "direções" independentes nas quais o sistema pode se mover a partir de uma dada configuração inicial. Por exemplo: o pêndulo simples tem apenas 1 grau de liberdade, enquanto o pêndulo duplo tem 2. Uma partícula livre em 3D tem 3, um gás de N partículas tem $3N$.

Quando o número de graus de liberdade de um sistema de N partículas em 3D é menor que $3N$ dizemos que ele tem vínculos (em 2D, o número correspondente é $2N$). Os pêndulos simples e duplo têm vínculos. Os N átomos de um corpo rígido têm apenas 6 graus de liberdade: é um sistema com muitos vínculos.

Quando o número de graus de liberdade de um sistema é igual

ao número de coordenadas generalizadas necessárias para descrever sua configuração o sistema é dito holonômico, e são mais fáceis de tratar que os não-holonômicos. Nos restringiremos aqui aos primeiros.

(Exemplo de sistema não-holonômico: bola rígida que pode rolar sem deslizar sobre um plano)

A evolução temporal de um sistema holonômico com coordenadas generalizadas q_1, \dots, q_n e energia potencial $U(q_1, \dots, q_n, t)$ - que pode depender de t - é determinada pelas n eq. de Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad i=1, \dots, n$$

onde $\mathcal{L} = T - U$.

7.4. Demonstrações da afirmação acima para sistemas com vínculos

Farei isso para uma partícula - a generalização para qualquer número é simples - confinada a se mover sobre um plano: tem, portanto, 2 graus de liberdade.

Existem 2 tipos de força sobre a partícula:

(i) forças de vínculo - neste caso, a normal. Elas podem, no caso geral, ser não conservativas, mas isto não vai importar. Um dos objetivos da formu-

ações Lagrangeana é encontrar equações de movimento que não as envolva - até porque em geral não desejamos conhecê-las. Sua resultante é \vec{F}_{vin} .

(ii) as demais forças, de resultante \vec{F} , suposta derivável de uma energia potencial $\vec{F} = -\nabla U(\vec{r}, t)$. (se todas elas são conservativas, então $U = U(\vec{r})$ não depende de t).

A resultante total é $\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_{\text{vin}} + \vec{F}$

Definimos $\mathcal{L} = T - U$, que exclui, portanto, qualquer referência às forças de vínculo.

A integral de ações sobre a trajetória é estacionária

A trajetória "correta" é $\vec{r}(t)$, com $\vec{r}(t_1) = \vec{r}_1$ e $\vec{r}(t_2) = \vec{r}_2$. $\vec{R}(t)$, que passa por estes mesmos 2 pontos (terminais) é $\vec{R}(t) = \vec{r}(t) + \vec{\epsilon}(t)$, todos eles no plano do movimento, $\vec{\epsilon}(t_1) = \vec{\epsilon}(t_2) = 0$.

Seja $S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\vec{R}, \dot{\vec{R}}, t) dt$ e $S_0 = S(\vec{R} = \vec{r})$.

Vamos provar que S_0 é estacionário, isto é, que $\delta S = S - S_0$ é zero em primeira ordem em $\vec{\epsilon}$, a "distância" entre a trajetória correta e a incorreta.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L} dt, \quad \delta \mathcal{L} = \mathcal{L}(\vec{R}, \dot{\vec{R}}, t) - \mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

$$\delta \mathcal{L} = \frac{1}{2} m [(\dot{\vec{r}} + \dot{\vec{\epsilon}})^2 - \dot{\vec{r}}^2] - [U(\vec{r} + \vec{\epsilon}, t) - U(\vec{r}, t)]$$

$$\delta \mathcal{L} = m \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{\epsilon}} - \vec{\epsilon} \cdot \nabla U + O(\epsilon^2)$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} [m \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{\epsilon}} - \vec{\epsilon} \cdot \nabla U] dt =$$

$$= - \int_{t_1}^{t_2} \vec{\epsilon} \cdot [m \ddot{\vec{r}} + \nabla U] dt$$

$$= - \int_{t_1}^{t_2} \vec{\epsilon} \cdot \vec{F}_{\text{vir}} dt \quad ; \quad \text{mas } \vec{F}_{\text{vir}} \text{ é nor-}$$

mal (perpendicular) ao plano de movimento, onde está $\vec{\epsilon}$

$$\Rightarrow \vec{\epsilon} \cdot \vec{F}_{\text{vir}} = 0 \quad \text{e} \quad \delta S = 0 \quad \text{cqd (parcial)}$$

Provamos o princípio de Hamilton para variações da trajetória que sejam consistentes com o vínculo, e não (completamente) arbitrárias, como deveríamos \Rightarrow isto quer dizer que não provamos - nem podemos! - as eq. Lagrange para as 3 coordenadas cartesianas, por exemplo!

Por outro lado, podemos prová-las com respeito às coordenadas generalizadas apropriadas, que são aquelas (z, neste caso) que podem ser variadas independentemente sempre consistentemente com os vínculos! Por isso, quando escrevemos a integral de ação em termos destas coordenadas

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t) dt,$$

qualquer variação da trajetória será

necessariamente consistente com os vínculos, e vale, portanto, a demonstração anterior.

Foi essencial para nossa demonstração que as forças que não as de vínculo fossem derivadas de energia potencial.

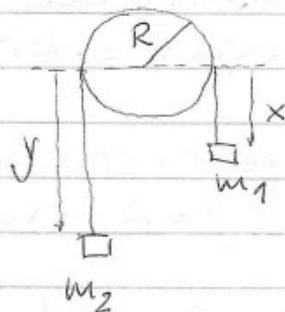
Uma força que obviamente não satisfaz a esta exigência é a de atrito, que não pode ser classificada como de vínculo (não é normal à superfície, em nosso caso) e não pode ser derivada de energia potencial. Portanto, quando ela está presente as eq. Lagrange não valem na forma mostrada e precisam ser modificadas. O resultado desta modificação não as tornam muito atraentes, como você verá em problema da lista de exercícios.

7.5 Exemplos das eq. Lagrange

Vamos mostrar 5; os 2 primeiros podem ser resolvidos de maneira simples com o formalismo Newtoniano, mas mesmo estes já mostram algumas vantagens do formalismo Lagrangeano, em especial com relação às forças de vínculo. Os 3 últimos exigiram muito esforço no formalismo Newtoniano, mas o Lagrangeano nos permite escrever as eq. movimento quase sem pensar.

Os exemplos ilustram que o formalismo Lagrangeano nos dá uma ferramenta que (quase) sempre nos permite escrever ~~em~~ sem esforço as eq. movimento. Por outro lado, ele não pode garantir que estas sejam fáceis de resolver. Mas, mesmo quando elas não têm soluções analíticas, são o primeiro passo para compreender a solução e frequentemente sugerem um ponto de partida para uma solução aproximada, além de dar respostas simples a certas questões subsidiárias (tais como as posições de equilíbrio). E sempre podemos resolvê-las numericamente, dadas as condições iniciais.

Exemplo 1: máquina de Atwood.



(fio inextensível de comprimento l , roldana de massa desprezível montada em rolamento sem atrito)

x e y não podem variar independentemente:

$$x + y + \pi R = l \Rightarrow y = -x + \text{const.}$$

Usemos x como (única) coordenada generalizada ($\dot{y} = -\dot{x}$).

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2$$

$$U = -m_1 g x - m_2 g y = -(m_1 + m_2) g x + \text{const}$$

$$e \quad \mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}^2 + (m_1 - m_2) g x$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = (m_1 - m_2) g \quad ; \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2) \dot{x}$$

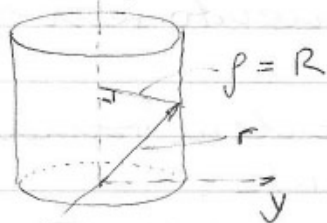
$$\Rightarrow (m_1 - m_2) g = \frac{d}{dt} [(m_1 + m_2) \dot{x}] = (m_1 + m_2) \ddot{x}$$

$$\ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \quad (\text{cheque o sinal})$$

(escolhendo m_1 e m_2 parecidos, a aceleração $\ll g$ fica + fácil de medir: a máquina de Atwood foi um método razoavelmente preciso de medir g no passado).

- solução Newtoniana (faça!)

Exemplo 2: Partícula confinada a se mover sobre (a superfície de) um cilindro circular sem atrito de raio R , sob a ação de força $\vec{F} = -k\vec{r}$ (lei de Hooke 3D)



Posição especificada por ϕ e z ($\rho = R$ fixo)

↓

Sistema (holonômico) com 2 graus de liberdade e

(2) coordenadas generalizadas (z, ϕ)

$$\vec{v}: v_\rho = 0, v_\phi = R\dot{\phi}, v_z = \dot{z}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m (R^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2)$$

$$\vec{F} = -k\vec{r} \Rightarrow U = \frac{1}{2} k r^2 = \frac{1}{2} k (R^2 + z^2)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (R^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2} k (R^2 + z^2)$$

2 graus de liberdade \Rightarrow 2 equações de movimento:

$$z: \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = -kz = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = \frac{d}{dt} (m\dot{z}) = m\ddot{z} \quad (\text{MHS})$$

$$\phi: \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{d}{dt} (mR^2\dot{\phi})$$

em relação ao eixo z é conservado.

\Downarrow

$$z(t) = A \cos(\omega t - \delta)$$

$\dot{\phi}$ é constante

-13/05/09-

Estes exemplos ilustram os passos a dar para resolver problemas pelo método Lagrangeano (se todos os vínculos são holonômicos e as demais forças deriváveis de energia potencial):

(1) Escreva as energias cinética e potencial - e portanto a Lagrangeana $\mathcal{L} = T - U$ - usando um referencial inercial conveniente.

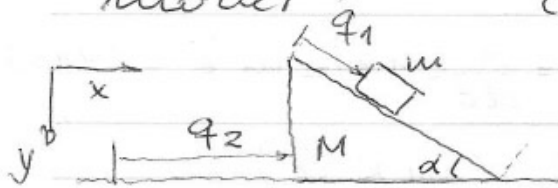
(2) Escolha um conjunto conveniente de (n) coordenadas generalizadas q_i e encontre expressões para as coordenadas usadas no passo 1 em termos destas coordenadas generalizadas

(passos 1 e 2 podem ser invertidos)

(3) Reescreva \mathcal{L} em termos de q_i e \dot{q}_i .

(4) Escreva as eq. Lagrange.

Exemplo 3: Bloco deslizando sobre rampa
 móvel (sem atrito) (rampa
 tem comprimento l .)



Tempo para
 deslizamento?

Sistema tem 2 graus de liberdade.
 Se encontrarmos \ddot{q}_1 (acelerações do
 bloco relativa à rampa) o problema
 estará resolvido.

$$(1) \quad T_M = \frac{1}{2} m \dot{q}_2^2$$

Bloco é mais complicado:

\dot{q}_1 é velocidade relativa à rampa:

$$\vec{v} = (v_x, v_y) = (\dot{q}_1 \cos \alpha + \dot{q}_2, \dot{q}_1 \sin \alpha),$$

$$T_m = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 \cos^2 \alpha + \dot{q}_2^2 + 2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos \alpha + \dot{q}_1^2 \sin^2 \alpha) =$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos \alpha)$$

$$U_M = \text{constante} = 0; \quad U_m = -mgy = -mgq_1 \sin \alpha$$

$$(3) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} (m+M) \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + 2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos \alpha) + mgq_1 \sin \alpha$$

(4)

$$q_2: \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = 0 = \frac{d}{dt} [M \dot{q}_2 + m (\dot{q}_2 + \dot{q}_1 \cos \alpha)]$$

→ momento generalizado conservado
 (componente x do momento linear total)

$$q_1: \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = mg \sin \alpha = \frac{d}{dt} [m (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 \cos \alpha)]$$

$$= m (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 \cos \alpha)$$

Derivando o momento conservado:

$$M \ddot{q}_2 + m (\ddot{q}_2 + \ddot{q}_1 \cos \alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{q}_2 = - \frac{m}{M+m} \ddot{q}_1 \cos \alpha, \text{ e ficamos com}$$

$$mg \operatorname{sen} \alpha = m \ddot{q}_1 \left(1 - \frac{m}{M+m} \cos^2 \alpha\right),$$

$$\ddot{q}_1 = \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{1 - \frac{m}{M+m} \cos^2 \alpha} \quad (\text{constante})$$

$$\Rightarrow \text{tempo para deslizamento} = \sqrt{\frac{2l}{\ddot{q}_1}}$$

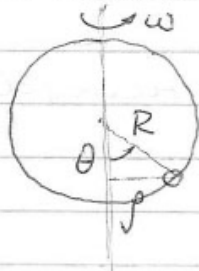
casos especiais:

$$(i) \alpha = \pi/2 \Rightarrow \ddot{q}_1 = g$$

$$(ii) M \rightarrow \infty \Rightarrow \ddot{q}_1 = g \operatorname{sen} \alpha$$

$$(iii) M \rightarrow 0 \Rightarrow$$

Exemplo 4: conta em círculo de arame girante (sem atrito, $\dot{\phi} = \omega$ constante)



Encontre posições de equilíbrio e discuta estabilidade

velocidade da conta (relativa a referencial inercial): $v_{\phi} = r\omega = R \operatorname{sen} \theta \omega$,
e $v_{\theta} = R \dot{\theta}$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \operatorname{sen}^2 \theta)$$

$U = \frac{1}{2} m g R (1 - \cos \theta)$ (relativa à base do aro)

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} m R^2 (\dot{\theta}^2 + \omega^2 \operatorname{sen}^2 \theta) - m g R (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = m R^2 \omega^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta - m g R \operatorname{sen} \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m R^2 \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow m R^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta - m g R \sin \theta = m R^2 \ddot{\theta},$$

ou

$$\ddot{\theta} = \left(\omega^2 \cos \theta - \frac{g}{R} \right) \sin \theta$$

(que não pode ser resolvida analiticamente em termos de funções elementares)

Posições de equilíbrio: (mas quando, se $\dot{\theta} = 0$, a conta permanece em repouso)

$$\ddot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\omega^2 \cos \theta - \frac{g}{R} \right) \sin \theta = 0$$

soluções:

(i) $\sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \pi$ (fácil de entender)

(ii) $\omega^2 \cos \theta - \frac{g}{R} = 0 \Rightarrow \cos \theta = \frac{g}{\omega^2 R}$;

como $|\cos \theta| \leq 1$, esta só é possível se

$$\frac{g}{\omega^2 R} \leq 1 \Rightarrow \omega^2 \geq \frac{g}{R}$$

Neste caso, aparecem mais 2 posições de equilíbrio, nos pontos

$$\theta_0 = \pm \arccos \left(\frac{g}{\omega^2 R} \right)$$

Então: além das 2 posições de equilíbrio na base e no topo do arco, sempre presentes mesmo que ω seja pequeno, se $\omega^2 > \frac{g}{R}$ aparecem outras 2 (simétricas com relação à base)

Estabilidade dos pontos de equilíbrio:

(i) $\theta = 0$; se θ é pequeno, $\sin \theta \approx \theta$

$\cos \theta \approx 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \left(\omega^2 - \frac{g}{R} \right) \theta \quad ; \quad \text{logo, se } \omega^2 < \frac{g}{R}$$

(rotação lenta), $\ddot{\theta} = -k\theta \quad (k > 0)$

⇓

MHS e equilíbrio é estável;
ao contrário, se $\omega^2 > \frac{g}{R}$ (rotação rápida),
 $\ddot{\theta} = k\theta \quad (k > 0)$ e o equilíbrio é instável

(ii) $\theta = \pi$: equilíbrio é sempre instável
($\cos \theta \approx -1 \Rightarrow \ddot{\theta} = -\left(\omega^2 + \frac{g}{R} \right) \sin \theta$)

As outras 2, que só existem se $\omega^2 > \frac{g}{R}$, são estáveis:

$$\ddot{\theta} = \left(\omega^2 \cos \theta - \frac{g}{R} \right) \underbrace{\sin \theta}_{> 0}$$

- se $\theta > \theta_0 \Rightarrow \cos \theta$ diminui e $\ddot{\theta} < 0 \Rightarrow$ retorno

se $\theta < \theta_0 \Rightarrow \cos \theta$ aumenta e $\ddot{\theta} > 0 \Rightarrow$ retorno

O fenômeno do desaparecimento de um (ponto de) equilíbrio estável e o aparecimento simultâneo de 2 outros divergindo a partir daquele é chamado de bifurcação (no exemplo, acontece quando $\omega^2 = \frac{g}{R}$)

Dispositivo como este foi usado por James Watt (1736-1823) para controlar o funcionamento de máquinas a vapor \rightarrow quando a "conta" alcançava uma

certa altura interrompia o suprimento de vapor.

— 15/05/09 —

Exemplo 5: Oscilações da conta próximas ao equilíbrio (estável)

(i) se $\omega^2 < \frac{g}{R}$, equilíbrio estável em $\theta = 0$, e

$$\ddot{\theta} = - \left(\frac{g}{R} - \omega^2 \right) \theta = - \Omega^2 \theta,$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{R} - \omega^2} \quad (\text{MHS com frequência } \Omega)$$

$$\Rightarrow \theta(t) = A \cos(\Omega t - \delta)$$

(ii) se $\omega^2 > \frac{g}{R} \Rightarrow$ equilíbrio estável em θ_0 dado por $\omega^2 \cos \theta_0 - \frac{g}{R} = 0$ (e seu simétrico);

pequeno deslocamento ϵ : $\theta = \theta_0 + \epsilon$

$$\cos(\theta_0 + \epsilon) \approx \cos \theta_0 - \epsilon \sin \theta_0$$

$$\sin(\theta_0 + \epsilon) \approx \sin \theta_0 + \epsilon \cos \theta_0$$

\Downarrow

$$\ddot{\theta} = \left[\omega^2 \cos(\theta_0 + \epsilon) - \frac{g}{R} \right] \sin(\theta_0 + \epsilon) =$$

$$= \left[\omega^2 \cos \theta_0 - \epsilon \omega^2 \sin \theta_0 - \frac{g}{R} \right] \left[\sin \theta_0 + \epsilon \cos \theta_0 \right]$$

$$\ddot{\epsilon} = - \epsilon \omega^2 \sin^2 \theta_0 = - \Omega'^2 \epsilon \quad (\text{em 1ª ordem em } \epsilon)$$

$$\Omega' = \omega \sin \theta_0 = \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{g}{\omega R} \right)^2}$$

(MHS com frequência angular Ω')

7.6 Momento generalizado e coordenadas ignoradas

Num sistema com n coordenadas generalizadas q_i , $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = F_i$ (que chamamos de força generalizada, apesar de não ter necessariamente dimensão de força) e $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = p_i$ (momento generalizado).

Com esta terminologia, as eq. Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

podem ser escritas como

$$F_i = \frac{d}{dt} p_i$$

Em particular, se \mathcal{L} não depende da coordenada q_i , $F_i = 0$ e o momento generalizado p_i é conservado.

Exemplo: partícula sujeita apenas ao peso

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

(z vertical para cima).

Como $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0$, p_x e p_y são conservados

Em coordenadas polares 2D, a componente ϕ da força generalizada é o torque (projeção z) e a do momento generalizado é o momento angular (projeção z).

Portanto, se a Lagrangeana de uma partícula em 2D é independente de ϕ , l_z é conservado.

Se \mathcal{L} não depende de q_i , esta coordenada é dita cíclica, ou ignorável. Sempre que possível devemos escolher tantas coordenadas quanto o possível que sejam ignoráveis \rightarrow leis de conservação.

A frase " \mathcal{L} não depende de q_i " é equivalente a dizer que " \mathcal{L} não muda, ou é invariante, quando q_i muda, todas as outras coordenadas mantidas fixas."

\Rightarrow Se \mathcal{L} é invariante por mudanças em q_i , p_i é conservado.

Esta conexão entre invariância (simetria) de \mathcal{L} e lei de conservação é o primeiro de uma série de resultados similares relacionando a invariância sob transformações (translações, rotações, e outras) à leis de conservação. Estes resultados são conhecidos coletivamente como o teorema de Noether (Emma Noether, matemática alemã, 1882 - 1935).

O formalismo lagrangeano pode ser estendido para incluir sistemas + gerais do que os abordados aqui. Forças dissipativas podem, também, às vezes ser incluídas, mas devemos admitir que o formalismo é + adequado quando elas são desprezíveis.

7.8. Mais sobre as leis de conservação

- Conservação do momento total

Considere sistema isolado de N partículas; ele é invariante por (sob) translações: se trasladarmos todas as partículas de \vec{E} ($\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_i + \vec{E}$), nenhuma propriedade física do sistema pode se alterar. Em particular,

$$U(\vec{r}_i + \vec{E}, t) = U(\vec{r}_i, t) \Rightarrow \delta U = 0$$

(δ : mudança por translação)

$$\text{Mas } \delta T = 0 \text{ também } (\dot{\vec{r}}_i + \dot{\vec{E}} = \dot{\vec{r}}_i)$$

$$\delta \mathcal{L} = 0$$

Isto vale qualquer que seja \vec{E} - em particular, se $\vec{E} = \epsilon \hat{x}$ (ϵ pequeno),

$$\delta \mathcal{L} = \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} + \dots + \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_N} = 0 \Rightarrow \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{\alpha}} = 0$$

$$\text{Mas (Lagrange)} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{\alpha}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_{\alpha}} = \frac{d}{dt} p_{\alpha x}$$

$$\Rightarrow \sum_{\alpha=1}^N \frac{d}{dt} p_{\alpha x} = \frac{d}{dt} P_x = 0$$

(P_x : componente x do momento total
 $\vec{P} = \sum_{\alpha} \vec{p}_{\alpha}$),

$\Rightarrow \vec{P}$ é conservado

- Conservação da energia

Se $\mathcal{L} = \mathcal{L}(r_i, \dot{q}_i, t)$,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}}_{p_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Eq. Lagrange: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \mathcal{L} = \sum_i (\dot{p}_i \dot{q}_i + p_i \ddot{q}_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_i (p_i \dot{q}_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Em muitos casos interessantes \mathcal{L} não depende explicitamente de t ($\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$), e resulta

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i [p_i \dot{q}_i] - \mathcal{L} \right) = 0$$

Defino $\mathcal{H} = \sum_i (p_i \dot{q}_i) - \mathcal{L}$ como a (função) Hamiltoniana do sistema, e

Se \mathcal{L} não depende explicitamente de t , \mathcal{H} é conservada.

\mathcal{H} é a base da formulação Hamiltoniana da Mecânica. Em muitas situações, ela é a energia total do sistema. Isto é, se a relação entre as coordenadas generalizadas e as cartesianas são independentes de t ,

$$\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q_1, \dots, q_N), \quad (\text{coordenadas naturais})$$

$$\mathcal{H} = T + U$$

Demonstração:

$$T = \frac{1}{2} \sum_\alpha m_\alpha \dot{r}_\alpha^2 \quad ; \quad \text{em coordenadas generalizadas:}$$

$$\dot{\vec{r}}_\alpha = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

$$\dot{\vec{r}}_\alpha \cdot \dot{\vec{r}}_\alpha = \sum_j \left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \cdot \sum_k \left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_k} \dot{q}_k \right), \quad e$$

MG 7.27

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\sum_j \left(\frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) \cdot \sum_k \left(\frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_j \sum_k \left[\underbrace{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_k}}_{A_{jk}} \right] \dot{q}_j \dot{q}_k
 \end{aligned}$$

Calcule $p_i \left(= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right)$:

$$p_i = \sum_j A_{ij} \dot{q}_j \quad ; \quad \text{Logo,}$$

$$\sum_i p_i \dot{q}_i = \sum_i \left(\sum_j A_{ij} \dot{q}_j \right) \dot{q}_i = \sum_{i,j} A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = 2T,$$

e

$$\mathcal{H} = 2T - (T - U) = T + U$$

Portanto, em coordenadas naturais, se a Lagrangeana não depende explicitamente de t ($\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$, \mathcal{L} é invariante por translações $\frac{\partial}{\partial t}$ temporais), a energia total é conservada (Noether),

-18/05/09-