Cap 2. Projéteis e partículas carregadas

Discutirei aqui o movimento de projéteis sujeitos à atração gravitacional e à resistência do ar, e o movimento de partículas carregadas em campos magnéticos uniformes. Os 2 problemas se prestam a soluções com o uso da eq. de movimento em coordenadas cartesianas e permitem a introdução e o uso de técnicas matemáticas importantes, além de terem interesse prático.

2.1 Resistência do ar: forças de arrasto

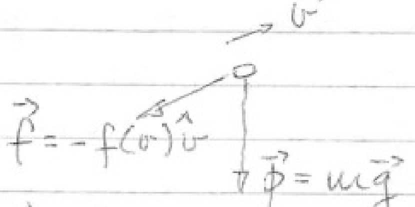
Na física básica ignora-se, em geral, a presença destas forças, às vezes justificadamente. Precisamos saber quando e como levá-las em conta.

Propriedades básicas da força de arrasto, ou força que um fluido faz sobre objeto que se move em seu interior:

- depende da velocidade do objeto
- para muitos objetos, é oposta a $\vec{v}$ (por exemplo, para esfera em translação pura; para outros, é uma boa aproximação)
- há casos importantes em que isto não é verdade (ex: ~~p~~ força sobre asa de avião)

Considerarei aqui apenas casos em que $\vec{f} \propto -\vec{v}$:

$$\vec{f} = -f(v)\,\hat{v}$$



(uso da notação $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$)

A função $f(v)$ (módulo da força de arrasto) é complicada, especialmente quando $v \to$ velocidade do som.

No entanto, para velocidades menores é uma boa aproximação escrever

$$f(v) = bv + cv^2 = \overset{\text{linear}}{f_{lin}} + \underset{\text{quadrático}}{f_{quad}}$$

com

$$f_{lin} = bv \quad \text{e} \quad f_{quad} = cv^2$$

(isto é surpresa?!)

A origem física destes termos é bem diferente (ver problema 3 da Lista 2):

f_{lin} está relacionada com o arrasto <u>viscoso</u> do fluido e é, em geral, proporcional a sua viscosidade e ao tamanho (dimensão linear) do projétil.

f_{quad} aparece porque o projétil tem que acelerar (empurrar) uma massa do fluido com a qual ele está colidindo continuamente, e é proporcional à densidade do fluido e à área da seção reta (ortogonal a $\vec{v}$) do projétil.

Para um projétil esférico (bala de canhão antigo, bola de baseball, gota de chuva) os coeficientes b e c têm a forma

$b = \beta D$ e $c = \gamma D^2$

D: diâmetro da esfera, β e γ dependentes da natureza do meio. Para o ar nas CNTP, seus valores aproximados são

$$\beta = 1{,}6 \times 10^{-4}\ N s/m^2 \quad e \quad \gamma = 0{,}25\ N.s^2/m^4,$$

valores que podem dar uma idéia grosseira sobre a importância relativa dos 2 termos mesmo para projéteis não esféricos.

Frequentemente podemos desprezar 1 dos 2 termos, simplificando assim o problema. Para esta análise, devemos considerar a razão $\frac{f_q}{f_e} = \frac{cv^2}{bv}$.

Para esferas:

$$\frac{f_q}{f_e} = \frac{\gamma D^2 v^2}{\beta D v} = \frac{\gamma D}{\beta} v = (1{,}6 \times 10^3) D v$$

(em SI)

Exemplo: importância relativa dos termos para bola de baseball ($D = 7cm$) com $v = 5 m/s$ (modesta), gota de chuva ($D = 1mm$ e $v = 0{,}6\ m/s$) e gota de óleo na experiência de Millikan ($D = 1{,}5\mu m$ e $v = 5 \times 10^{-5}\ m/s$)

- bola de baseball: $\frac{f_q}{f_e} \simeq 600 \Rightarrow f_e$ desprezível
- gota de chuva $\frac{f_q}{f_e} \simeq 1$
- gotícula de óleo: $\frac{f_q}{f_e} \simeq 10^{-7}$

Moral do exemplo:

- há objetos para os quais a força de arrasto é predominantemente linear, e o termo quadrático pode ser desprezado (minúsculas gotas de líquido no ar, mas também objetos um pouco maiores em fluidos muito viscosos como rolamentos de esfera em melado, óleo)
- para a maioria dos outros (bolas de golfe, futebol, humanos em queda "livre") a força de arrasto dominante é a quadrática e podemos desprezar o termo linear... o que é uma falta de sorte, porque é o problema + difícil

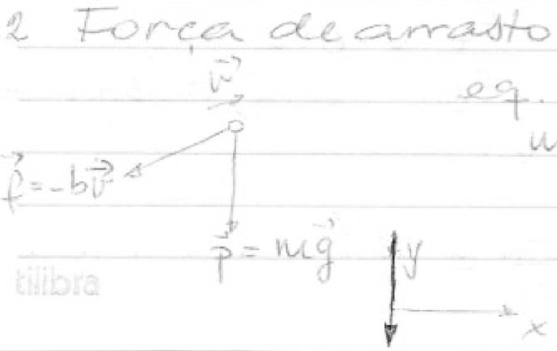
Esta razão pode ser escrita em termos de um importante parâmetro, o número de Reynolds, elemento essencial de um estudo + profundo de movimento em fluidos: $\frac{f_q}{f_\ell}$ tem a mesma ordem de grandeza que $R = \frac{D\rho v}{\eta}$ (ρ: densidade do fluido; η: viscosidade)

$\Downarrow$

f_q domina quando R é grande

f_ℓ " " " " pequeno

2.2 Força de arrasto linear (viscosa)



eq. de movimento:

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - b\vec{v}$$

(eq. dif. de 2ª ordem em $\vec{r}$)

Característica importante: eq. de movimento não envolve $\vec{r}$, apenas suas derivadas de ordem 1 e 2.

$\Downarrow$

$$m\dot{\vec{v}} = m\vec{g} - b\vec{v} \quad \text{(de 1ª ordem em } \vec{v}\text{)}$$

e obtemos $\vec{r}$ integrando $\vec{v}$

O que mais simplifica a solução para o arrasto linear é que as eq. de movimento nas componentes são desacopladas: (o que não ocorre para o caso quadrático)

$$m\dot{v}_x = -bv_x$$
$$m\dot{v}_y = mg - bv_y \, ,$$

e podem ser resolvidas separadamente

Além disso, cada componente define um problema de interesse por si mesmo.

- Movimento horizontal com arrasto linear

carrinho sobre piso sem atrito com arrasto linear

Condições iniciais: $x(t=0) = 0$,
$v_x(t=0) = v_{x_0}$

Fazer análise qualitativa

Eq. movimento:

$$\dot{v}_x = -k v_x \, , \qquad k = \frac{b}{m}$$

Separação de variáveis:

$$\frac{dv_x}{dt} = -k v_x \Rightarrow \frac{dv_x}{v_x} = -k\,dt$$

$$\int_{v_{0x}}^{v_x} \frac{dv_x'}{v_x'} = \int_0^t -k\,dt'$$

$$\left[\ln v_x'\right]_{v_{0x}}^{v_x(t)} = -kt$$

$$\ln v_x(t) - \ln v_{0x} = \ln \frac{v_x(t)}{v_{0x}} = -kt$$

$$\frac{v_x(t)}{v_{0x}} = e^{-kt} \Longrightarrow v_x(t) = v_{0x} e^{-kt}$$

Mas ~~m~~ a solução era óbvia (afinal, qual a função que é proporcional a sua derivada?)

Escrevo $v_x(t) = v_{0x} e^{-t/\tau}$,

com $\tau = \frac{1}{k} = \frac{m}{b}$ chamado de tempo característico: o tempo necessário para a velocidade cair a $\frac{1}{e}$ $\left(e^{-1} = \frac{1}{2{,}7} \sim \frac{1}{3}\right)$ de seu valor inicial

Análise qualitativa de τ

$$\lim_{t\to\infty} v_x(t) = 0$$

Para encontrar $x(t)$, integre como

$$v_x = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow \int_0^t v_x(t')\,dt' = \int_{x(0)}^{x(t)} dx' = x(t) - x(0)$$

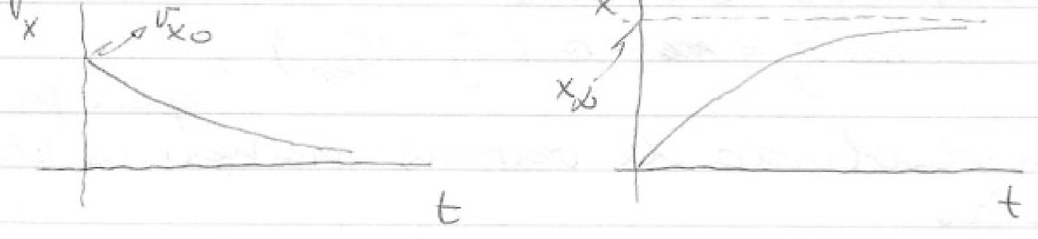
Logo,

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v_{0x} e^{-t'/\tau}\,dt' =$$

$$= 0 + \left[-v_{0x}\tau e^{-t'/\tau}\right]_0^t$$

$$x(t) = \underbrace{v_{x0}\tau}_{x_\infty}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = x_\infty\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Veja que $\lim_{t \to \infty} x(t) = x_\infty = v_{x0} \tau$



Movimento vertical com arrasto linear

Projétil lançado para baixo na vertical: escolho eixo y vertical para baixo

$$m\dot{v}_y = mg - bv_y$$

Análise qualitativa:

- com $v_y > 0$ (para baixo), a força de arrasto é para cima;
- enquanto v_y for pequeno, $mg > bv_y$ e o objeto acelera para baixo, até que $mg = bv_y$;
- a velocidade em que isto ocorre é chamada a velocidade terminal:

$$v_{ter} = \frac{mg}{b}$$ (diferente para objetos diferentes)

Para 2 objetos de mesma forma e tamanho (mesmo b), o + pesado terá v_{ter} maior.

- como $v_{ter} \propto \frac{1}{b}$, é uma medida inversa da intensidade (importância) da resistência do ar: quanto maior for esta, menor será v_{ter}

E se v_{0y} for para cima?

Solução da eq. de movimento:
Reescrevo-a como

$$m\dot{v}_y = ~~m~~ - b\,(v_y - v_{ter}),$$

que pode ser resolvida de várias maneiras. Uma delas:

$$u(t) = v_y(t) - v_{ter} \Rightarrow \dot{u} = \dot{v}_y$$

$$m\dot{u} = -bu \quad (\text{igual à anterior!})$$

$$u(t) = u_0 e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{m}{b}$$

$$\Rightarrow v_y(t) = v_{ter} + (v_{y_0} - v_{ter})e^{-t/\tau}$$

$$= v_{y_0} e^{-t/\tau} + v_{ter}(1 - e^{-t/\tau})$$

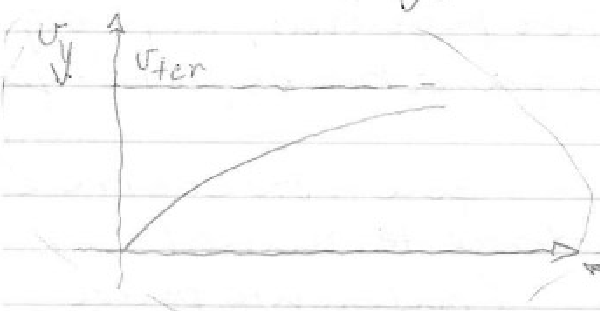


figura para $v_{y_0} = 0$

$$\lim_{t\to\infty} v_y(t) = v_{ter}$$

Se $v_{y_0} = 0$,

$$v_y(t) = v_{ter}(1 - e^{-t/\tau})$$

Significado de τ: quando $t = \tau$,

$$v_y(\tau) = v_{ter}(1 - e^{-1}) \simeq \frac{2}{3} v_{ter}$$

Se $t = 3\tau$, $v_y(3\tau) \simeq 0.95\, v_{ter}$

16/03/09 -

Note também que $v_{ter} = \frac{m}{b} g = g\tau$:

v_{ter} é a velocidade que um objeto em queda livre (de resistência do ar) teria após um intervalo de tempo τ.

Para encontrar $y(t)$, basta integrar $v_y(t)$, já que $v_y = \frac{dy}{dt}$ ($\Rightarrow dy = v_y\,dt$)

$$y(t) - y(0) = \int_0^t v_y(t')\,dt' =$$

$$\int_0^t \left[v_{ter} + (v_{y_0} - v_{ter}) e^{-t'/\tau} \right] dt' \Rightarrow$$

$$y(t) = v_{ter} t + (v_{y_0} - v_{ter}) \tau (1 - e^{-t/\tau})$$

2.3 Trajetória e alcance em meio linear

Podemos agora combinar $x(t)$ e $y(t)$ e eliminar t, para obter a eq. da trajetória. Por conveniência de interpretação, vou inverter o sentido positivo do eixo y, fazendo o apontar para cima - basta trocar o sinal de v_{ter} na expressão de $y(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = v_{x_0} \tau (1 - e^{-t/\tau}) \\ y(t) = (v_{y_0} + v_{ter}) \tau (1 - e^{-t/\tau}) - v_{ter} t \end{cases}$$

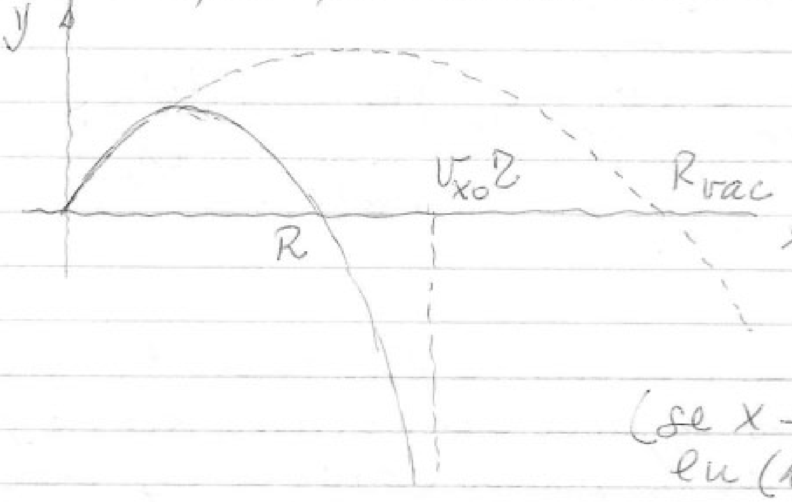
Uso a 1ª eq. para obter t em função de x e levo o resultado na 2ª:

$$1 - e^{-t/\tau} = \frac{x}{v_{x_0}\tau}$$

$$e^{-t/\tau} = 1 - \frac{x}{v_{x_0}\tau} \Rightarrow t = -\tau \ln\left(1 - x/v_{x_0}\tau\right)$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \frac{v_{y0} + v_{ter}}{v_{x0}}\, x + v_{ter}\,\tau \ln\left(1 - \frac{x}{v_{x0}\tau}\right)$$

Não é muito fácil enxergar o que esta eq. está dizendo. Veja seu gráfico, comparado com a trajetória na ausência de forças de arrasto:



(se $x \to v_{x0}\tau$, $\ln\left(1 - \frac{x}{v_{x0}\tau}\right) \to -\infty$)

A trajetória tem assíntota vertical em $x = v_{x0}\tau$. No limite em que a força de arrasto se anula ($v_{ter}, \tau \to \infty$), a trajetória coincide com a da queda livre (faça!) (verifique!!)

Alcance horizontal

No vácuo, $R_{vac} = \dfrac{2 v_{x0} v_{y0}}{g}$

Agora, é R tq $y(R) = 0$:

$$\frac{v_{y0} + v_{ter}}{v_{x0}}\, R + v_{ter}\,\tau \ln\left(1 - \frac{R}{v_{x0}\tau}\right) = 0$$

(eq. transcendente sem solução analítica)

Vamos obter solução aproximada, para o caso em que b é pequeno (v_{ter} e τ são grandes, e o x do argumento do logaritmo é pequeno)

Relembre:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \text{ (se } x \text{ é pequeno)}$$

Ficamos com:

$$\left[\frac{v_{y0}+v_{ter}}{v_{x0}}\right]R - v_{ter}\tau\left[\frac{R}{v_{x0}\tau} + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{v_{x0}\tau}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{R}{v_{x0}\tau}\right)^3\right] = 0$$

$$\frac{v_{y0}}{v_{x0}}R - v_{ter}\tau\left(\frac{R}{v_{x0}\tau}\right)^2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{R}{v_{x0}\tau}\right] = 0$$

$R = 0$ é solução trivial; divido por R:

$$\frac{v_{y0}}{v_{x0}} - \frac{v_{ter}}{\tau}\frac{R}{v_{x0}^2}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{R}{v_{x0}\tau}\right] = 0$$

$\Downarrow$ $\quad (v_{ter}/\tau = g)$

$$R = \frac{2v_{x0}v_{y0}}{g} - \frac{2}{3v_{x0}\tau}R^2$$

(Lembre: $v_{x0}\tau > R$)

1ª aprox. (ordem zero!): $R \simeq \frac{2v_{x0}v_{y0}}{g} = R_{vac}$

2ª (ordem 1): substituo R no lado direito por R_{vac} $\Rightarrow$

$$R \simeq R_{vac} - \frac{2}{3v_{x0}\tau}R_{vac}^2$$

$\Downarrow$

$$R \simeq R_{vac} - \frac{2}{3v_{x0}\tau}\frac{2v_{x0}v_{y0}}{g}R_{vac} = R_{vac}\left(1 - \frac{4}{3}\frac{v_{y0}}{v_{ter}}\right)$$

$(\tau g = v_{ter})$

1. $R < R_{vac}$ (como era de se esperar)

2. Correção depende apenas de $\frac{v_{y0}}{v_{ter}}$

(se $\frac{v}{v_{ter}} << 1$ ao longo do percurso, o arrasto é muito pequeno e pode ser ignorado.)

2.4 Resistência do ar quadrática

É a melhor aproximação na maioria dos casos concretos

$$\vec{f} = -cv^2\hat{v} = -cv\vec{v} = -c\sqrt{v_x^2+v_y^2}\,\vec{v}$$

Em coordenadas cartesianas,

$$\begin{cases} m\dot{v}_x = -c\sqrt{v_x^2+v_y^2}\,v_x \\ m\dot{v}_y = mg - c\sqrt{v_x^2+v_y^2}\,v_y \end{cases}$$

eixo y: $\downarrow$

$\Rightarrow$ eqs. <u>acopladas</u>! E <u>não-lineares</u>!!

O problema é agora bem + complicado. No caso geral estas eq. não podem ser resolvidas em termos de funções elementares. Em termos ainda + gerais, eq. diferenciais não lineares podem conduzir ao fenômeno do caos (mas não neste caso).

Vamos, outra vez, resolver o problema por partes:

- carrinho em movimento horizontal;
- queda na vertical

Estes são, felizmente, solúveis.

- Movimento horizontal com arrasto quadrático

Eq. movimento:

$$m\dot{v} = m\frac{dv}{dt} = -cv^2$$

Separando variáveis e integrando:

$$m\int_{v_0}^{v}\frac{dv'}{v'^2} = -c\int_0^t dt'$$

$$m\left(\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v}\right) = -ct,$$

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + cv_0 t/m} = \frac{v_0}{1 + t/\tau}, \quad \tau = \frac{m}{cv_0}$$

Significado de τ:

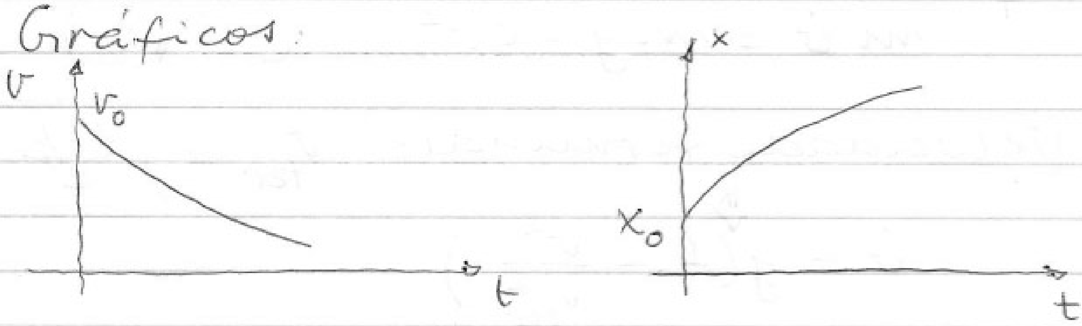
se $t = \tau$, $v = \frac{v_0}{2}$

A posição $x(t)$: $\frac{dx}{dt} = \dot{x} = v$

$$\Rightarrow \quad x(t) = x_0 + \int_0^t \frac{v_0}{1 + t'/\tau}\,dt' =$$

$$= x_0 + v_0\tau \ln(1 + t/\tau)$$

Gráficos:



Na aparência superficial são muito semelhantes aos do arrasto linear:

- $\lim_{t\to\infty} v(t) = 0$; mas neste caso, o decaimento é muito + lento (polinomial, enquanto é exponencial para o arrasto linear)

- esta diferença se torna + dramática no comportamento de $x(t)$: no caso linear, $\lim_{x\to\infty} x(t)$ é finito ($= v_0 \tau = x_\infty$, se $x_0 = 0$) enquanto no quadrático este limite diverge (é infinito!)

Este resultado mostra que extrapolar a validade da dependência quadrática para v muito pequeno não é realista - apesar do arrasto linear e do atrito cinético serem pequenos no início, quando $v \to 0$ (e $v^2 \to 0$ ainda + rápido) não podem + ser ignorados, e um dos 2 vai garantir que o movimento cesse antes do ∞...

- 18/03/09 -

- Movimento vertical com arrasto quadrático

Eq. movimento:

$$m\dot{v} = mg - cv^2 \qquad (\downarrow y)$$

Velocidade terminal: $v_{ter} = \sqrt{\dfrac{mg}{c}}$

$$\dot{v} = g\left(1 - \frac{v^2}{v_{ter}^2}\right)$$

Separação de variáveis e integração:

$$\int_0^v \frac{dv'}{1 - v'^2/v_{ter}^2} = \int_0^t g\,dt' \Rightarrow$$

$$\frac{v_{ter}}{g} \text{ arctgh}\left(\frac{v}{v_{ter}}\right) = t$$

(lembre: $\text{tgh}\, x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$)

$\Rightarrow \quad v = v_{ter} \,\text{tgh}\left(\dfrac{gt}{v_{ter}}\right)$, ou, com $\tau = \dfrac{v_{ter}}{g}$,

$$v = v_{ter}\, \text{tgh}\left(\frac{t}{\tau}\right) = g\tau\, \text{tgh}\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

Se τ é grande (i.e., $\frac{t}{\tau} \ll 1$ ao longo do movimento e o arrasto é pequeno – c é pequeno):

$$\text{tgh}(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} \simeq \frac{1 + x - (1 - x)}{1 + x + 1 - x} = x$$

e $v \simeq g\tau \cdot \dfrac{t}{\tau} = gt$.

Para obter $y(t)$, integro:

$$\int_{y_0}^{y} dy' = \int_0^t g\tau\, \text{tgh}\left(\frac{t'}{\tau}\right) dt'$$

$$y = y_0 + g\tau^2 \ln\left[\cosh\left(\frac{t}{\tau}\right)\right]$$

. Movimento combinado

Eq. movimento

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - cv^2 \hat{v}$$
$$= m\vec{g} - cv\vec{v}, \text{ com}$$

componentes

$$m\dot{v}_x = -c\sqrt{v_x^2 + v_y^2}\; v_x$$
$$m\dot{v}_y = -mg - c\sqrt{v_x^2 + v_y^2}\; v_y \quad (\uparrow y)$$

Estas eqs. não são as mesmas que acabamos de resolver, e não podemos simplesmente juntar as (2) soluções obtidas, como fizemos no caso linear. Ainda pior, estas 2 não tem solução analítica! Só podemos resolvê-las numericamente - ~~mas~~ o que significa que temos que, a priori, especificar as condições iniciais e não podemos encontrar uma solução geral.

Apesar disto, podemos usar as eqs. para provar várias propriedades gerais da trajetória:

- a altura máxima é menor, e é alcançada num tempo + curto, que no vácuo: enquanto o projétil se move para cima, $(v_y > 0)$ a resistência do ar tem componente vertical para baixo $\Rightarrow$ logo, a aceleração para baixo é maior que g. (ver aula de exercícios)
- quando $t \to \infty$, trajetória tem assíntota vertical (como no caso linear): em seu movimento para baixo, o projétil está sempre se movendo cada vez mais rápido, e $\lim_{t\to\infty} v_y(t) = -v_{ter}$. Ao mesmo tempo, v_x é decrescente e se aproxima de zero $\Rightarrow$ $\sqrt{v_x^2 + v_y^2} \to v_{ter}$. Em particular, se t é grande, a eq. para v_x pode ser aproximada por

$$\dot{v}_x \simeq -\frac{c v_{ter}}{m} v_x = -k v_x \quad (k>0),$$ cuja solução é uma exponencial

decrescente, $v_x = Ae^{-kt}$ e, portanto,

$$x(t) = \int_0^t v_x(t')\,dt' = \underbrace{\int_0^T v_x(t')\,dt'}_{X\text{ finito}} + \int_T^{t} v_x(t')\,dt'$$

$$= X + \int_T^t A e^{-kt'}dt' = X + \frac{A}{k}\left[e^{-kT} - e^{-kt}\right]$$

e $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ é finito.

2.5 Movimento de partícula carregada em campo magnético uniforme

– Tema de interesse em si mesmo (cíclotrons, LHC) e que permite a apresentação de técnicas matemáticas muito úteis.

Consideremos carga q (>0) que se move sob ação de $\vec{B} = B\hat{z}$, suposto grande o suficiente para permitir que desprezemos o peso. A resultante é $\vec{F} = q\,\vec{v}\times\vec{B}$ (Lorentz), e a eq. de movimento

$$m\dot{\vec{v}} = q\,\vec{v}\times\vec{B} \qquad \text{(análise qualitativa)}$$

Decompondo em componentes:

$$\vec{v}\times\vec{B} = (v_y B,\ -v_x B,\ 0),\ \text{e}$$

$$\begin{cases} m\dot{v}_x = qBv_y & \text{(eqs. acopladas)} \\ m\dot{v}_y = -qBv_x & \\ m\dot{v}_z = 0 & \longrightarrow v_z \text{ é constante} \end{cases}$$

(Afinal, a força magnética é sempre perpendicular a $\vec{B}$, que tem a direção $\hat{z}$)

no plano xy

Consideremos o vetor 2-dimensional (v_x, v_y) : é a velocidade transversa.

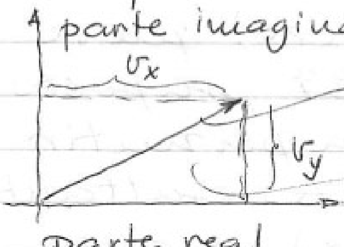
Notação para simplificar as eqs.:

$$\omega = \frac{qB}{m}$$ (frequência do ciclotron)

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{v}_x = \omega v_y \\ \dot{v}_y = -\omega v_x \end{cases}$$, eqs. acopladas, mas que podem ser resolvidas de muitas maneiras (imagine uma!)

Vou apresentar uma que usa os números complexos _ técnica com muitas aplicações em várias áreas da Física

Defino complexo $\eta = v_x + i v_y \quad (i = \sqrt{-1})$



$\eta = v_x + i v_y$ (é a velocidade transversa!)

(diagrama de Argand-Gauss)

A vantagem de usar os números complexos é a seguinte:

$$\dot{\eta} = \dot{v}_x + i \dot{v}_y = \omega v_y - i\omega v_x = -i\omega(v_x + i v_y)$$

$$\Rightarrow \dot{\eta} = -i\omega\eta$$

$$\Rightarrow \eta(t) = A e^{-i\omega t}$$

2.6 Exponenciais complexas

Vamos (re)ver algumas propriedades.

Se $x \in \mathbb{R}e \Rightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

(ver: Berkeley, cap4, Nota Matemática
Feynman, sec. 22.5 e 22.6)

Se $z \in \mathbb{C}$, definimos
$$e^z = 1 + z + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \quad , \text{ e,}$$

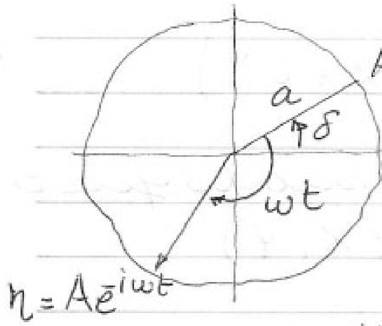
com isso, a exponencial complexa tem propriedades equivalentes à real.:

- se $z, \omega \in \mathbb{C}$, $e^z e^\omega = e^{(z+\omega)}$
- $\dfrac{d}{dz}\left(A e^{kz}\right) = k\left(A e^{kz}\right)$
- se $z = i\theta$ ($\theta \in \mathbb{R}e$) (imaginário puro)

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \cdots$$
$$= \left[1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots\right] + i\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots\right]$$
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta \quad \text{(Euler-de Moivre)}$$

$\longrightarrow$ figura: círculo unitário

Se $\eta = A e^{-i\omega t}$, A fixo: pode ser escrito na forma $A = a e^{i\delta}$, $a = |A|$ é o módulo e δ o ângulo polar de A:



$$\eta = A e^{-i\omega t} = a e^{i(\delta - \omega t)}$$
$$\Downarrow$$

Quando t cresce, η se move (no plano de Argand) no sentido anti-trigonométrico sobre o círculo de raio a com velocidade angular ω.

2.7 Solução para carga em campo $\vec{B}$

Obtivemos: v_z = constante e $\eta \, (= v_x + i v_y) = A e^{-i\omega t}$: a velocidade

transversa muda de direção, girando no sentido anti-trigonométrico com velocidade angular constante $\omega = \frac{qB}{m}$ e módulo constante ($= a = |A|$).
Isto sugere que a partícula executa movimento helicoidal. Vamos verificar:

$$v_z = v_{z_0} \Longrightarrow z(t) = z_0 + v_{z_0} t$$

Vamos introduzir $\xi \, (\in \mathbb{C}) = x + iy \Rightarrow$ representa a posição transversa (x, y).
Como $\dot{\xi} = \eta$, $\cancel{\xi(t) - \xi(0) = \int_0^t \eta(t')\,dt'}$

$$\cancel{\xi(t) = \xi(0) + \left[\frac{Ae^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_0^t}$$

$$\xi = \int \eta\, dt = \int A e^{-i\omega t}\, dt = \frac{iA}{\omega} e^{-i\omega t} + \text{const.}$$

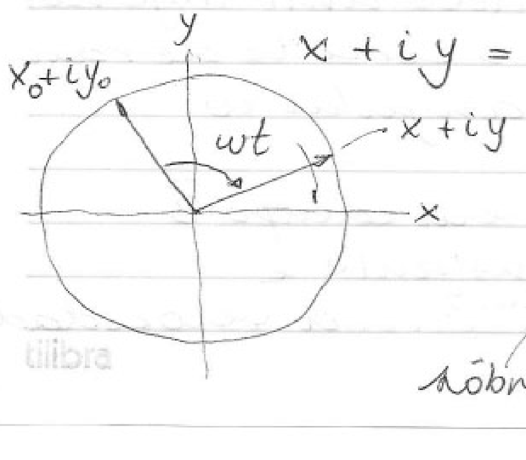
Batizo: $\frac{iA}{\omega} = C$, $\text{const.} = X + iY$

$$\Downarrow$$

$$x + iy = C e^{-i\omega t} + (X + iY)$$

Redefino a origem de modo que o eixo z passe pelo ponto (X, Y)

$$\Downarrow$$



$$x + iy = C e^{-i\omega t}, \quad C = x_0 + iy_0$$

$$\Downarrow$$

A posição transversa se move, no sentido anti-trigonométrico com velocidade

sobre um círculo

MG 2.21

angular constante $\omega = \frac{qB}{m}$ $\Rightarrow$ partícula descreve uma hélice (uniforme) cujo eixo é paralelo a $\vec{B}$.

Exemplos: partículas de raios cósmicos são "capturadas" pelo campo magnético terrestre

Se $v_z = 0$ $\Rightarrow$ trajetória é um círculo (cíclotron ~~z~~, onde as partículas são aceleradas por campo elétrico pulsante.)
O raio da órbita é

$$r = \frac{v}{\omega} = \frac{mv}{qB} = \frac{p}{qB}$$, e aumenta

à medida que a partícula acelera, até emergir na periferia externa do anel (imãs circulares que criam $\vec{B}$).