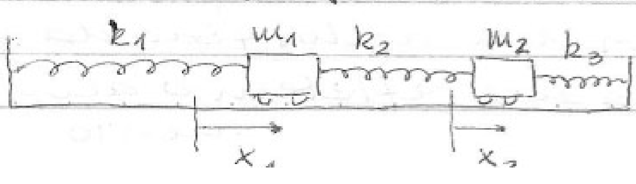
Cap. 11: Osciladores acoplados e modos normais.

Nosso foco aqui é um sistema de massas conectadas de alguma forma e que podem oscilar, como os átomos de uma molécula como o CO_2: um sistema de osciladores acoplados. Veremos que 2 ou mais osciladores acoplados têm várias frequências naturais (normais) e seu movimento + geral é uma combinação de vibrações em todas as suas frequências naturais diferentes.

Usaremos a matemática das matrizes relembrada no capítulo anterior. As aplicações óbvias das ideias aqui discutidas, além do estudo das moléculas, inclui a acústica, as vibrações de estruturas como pontes e edifícios e circuitos elétricos acoplados.

Vamos supor aqui que as forças envolvidas obedeçam à lei de Hooke, o que resulta em equações lineares. Este caso, com muitas aplicações, é, no entanto, particular, e o comportamento de osciladores não lineares é muito + rico e complexo.

11.1 Duas massas e tres molas



Os carrinhos se movem sem atrito sobre um piso horizontal, e as coordenadas x_1 e x_2 medidas a partir das posições de equilíbrio – vamos supor que, nesta posição, as molas estejam completamente relaxadas (hipótese desnecessária, mas simplificadora neste estágio).

Vamos usar a formulação newtoniana para chegar às eqs. de movimento.

Na situação da figura:

mola 1: esticada de x_1, faz força $k_1 x_1$ sobre m_1 (para a esquerda)

mola 2: esticada de $x_2 - x_1$, faz força $k_2(x_2 - x_1)$ para a direita sobre m_1.

Força resultante sobre m_1:

$$-k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2$$

Sobre m_2:

$$-k_2(x_2 - x_1) - k_3 x_2 = k_2 x_1 - (k_2 + k_3)x_2$$

$$m_1 \ddot{x}_1 = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2$$
$$m_2 \ddot{x}_2 = k_2 x_1 - (k_2 + k_3)x_2 \, ,$$

sistema que pode ser escrito em forma matricial

$$\overleftrightarrow{M} \ddot{\vec{x}} = -\overleftrightarrow{K} \vec{x} \, , \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} ,$$

$$\overleftrightarrow{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} , \quad \overleftrightarrow{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

A "matriz de massa" é, neste caso, diagonal. A "matriz constante de mola" tem elementos não nulos fora da diagonal - são eles que refletem o acoplamento entre as coordenadas x_1 e x_2. Esta equação matricial é uma generalização natural da equação para o sistema massa-mola: com apenas 1 grau de liberdade, as matrizes $\overleftrightarrow{x}$, $\overleftrightarrow{M}$ e $\overleftrightarrow{K}$ são 1×1, isto é, números. Note também que as matrizes $\overleftrightarrow{M}$ e $\overleftrightarrow{K}$ são simétricas, o que será verdade para todas as matrizes neste capítulo.

Para resolver a eq. movimento, podemos procurar soluções nas quais os 2 carrinhos oscilam com a mesma frequência ω:

$$x_1(t) = \alpha_1 \cos(\omega t - \delta_1)$$
$$x_2(t) = \alpha_2 \cos(\omega t - \delta_2)$$

Se existirem soluções com esta forma, haverá também com

$$y_1(t) = \alpha_1 \operatorname{sen}(\omega t - \delta_1)$$
$$y_2(t) = \alpha_2 \operatorname{sen}(\omega t - \delta_2),$$

que combinamos na forma complexa

$$z_1(t) = x_1(t) + i y_1(t) = \alpha_1 e^{i(\omega t - \delta_1)} =$$
$$= \alpha_1 e^{-i\delta_1} e^{i\omega t} = a_1 e^{i\omega t}, \text{ e}$$
$$z_2(t) = \qquad = a_2 e^{i\omega t}, \quad a_i = \alpha_i e^{-\delta_i}$$

Como estes 2 complexos têm a mesma dependência temporal, podemos combiná-los numa solução matricial com a forma

$$\overleftrightarrow{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} e^{i\omega t} = \overleftrightarrow{a} e^{i\omega t}$$

onde $\overleftrightarrow{a}$ é uma (matriz) constante

$$\overleftrightarrow{a} = \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{-\delta_1} \\ \alpha_2 e^{-\delta_2} \end{bmatrix}$$

Vamos substituir na eq. de movimento (matricial):

$$-\omega^2 \overleftrightarrow{M} \overleftrightarrow{a} e^{i\omega t} = -\overleftrightarrow{K} \overleftrightarrow{a} e^{i\omega t}$$

$$\Downarrow$$

$$(\overleftrightarrow{K} - \omega^2 \overleftrightarrow{M}) \overleftrightarrow{a} = 0 ,$$

que é uma generalização da eq. de autovalores vista no capítulo anterior (naquela, ω^2 é o autovalor e $\overleftrightarrow{M}$ é a matriz ~~identidade~~ unidade) e pode ser resolvida de forma similar. Se a matriz $(\overleftrightarrow{K} - \omega^2 \overleftrightarrow{M})$ tem determinante não nulo, então a única solução é a trivial $\overleftrightarrow{a} = 0$. Logo, só haverá solução não trivial (movimento!) se

$$\det(\overleftrightarrow{K} - \omega^2 \overleftrightarrow{M}) = 0 ,$$

que é uma equação quadrática em ω^2 $\Rightarrow$ em geral, 2 soluções para ω^2, o que implica haver 2 frequências ω nas quais os carrinhos oscilam com movimento senoidal puro.

As 2 frequências assim obtidas são chamadas normais. Os detalhes da equação que as determinam dependem dos valores de k e m. Vamos discutir em detalhe 2 casos particulares

11.2 Molas idênticas e massas iguais.

Suponhamos $m_1 = m_2$ e $k_1 = k_2 = k_3 \Rightarrow$

$$\overleftrightarrow{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \text{ e } \overleftrightarrow{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}$$

$$\overleftrightarrow{K} - \omega^2 \overleftrightarrow{M} = \begin{bmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix},$$

com determinante

$$\det(\overleftrightarrow{K} - \omega^2 \overleftrightarrow{M}) = (2k - m\omega^2)^2 - k^2 =$$
$$= (2k - m\omega^2 + k)(2k - m\omega^2 - k)$$
$$= (k - m\omega^2)(3k - m\omega^2)$$

As frequências normais são determinadas pela condição que este determinante seja nulo;

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad e \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$$

Estas são as frequências nas quais os 2 carrinhos podem oscilar de modo puramente senoidal (harmônico). Para completar a solução precisamos determinar $\overleftrightarrow{a}$.

Primeiro modo normal

$$\omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \overleftrightarrow{K} - \omega_1^2 \overleftrightarrow{M} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix},$$

e a eq. de autovalores fica

$$k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} a_1 - a_2 = 0 \\ -a_1 + a_2 = 0 \end{matrix} \quad \text{(redundantes)},$$

que implicam em

$$a_1 = a_2 = A e^{-i\delta} \quad e$$

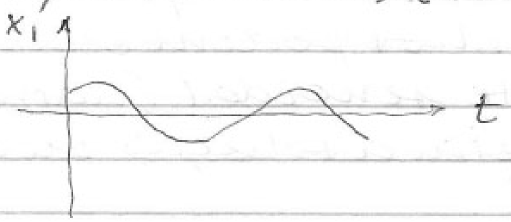
$$\overleftrightarrow{z}(t) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} e^{i\omega_1 t} = \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} e^{i(\omega_1 t - \delta)}$$

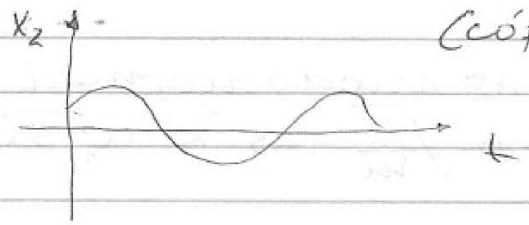
e $\overleftrightarrow{x}(t) = \mathrm{Re}\, \overleftrightarrow{z}(t) = \begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix} \cos(\omega_1 t - \delta)$, ou

$x_1(t) = A\cos(\omega_1 t - \delta)$

$x_2(t) = A\cos(\omega_1 t - \delta)$ (primeiro modo normal)

Neste modo normal, os 2 carrinhos oscilam em fase, com a mesma amplitude A. A mola do meio fica sempre relaxada e é, de fato, irrelevante, o que desacopla os 2 carrinhos (coordenadas) e faz com que cada um oscile independentemente do outro, com a frequência igual à do sistema massa-mola tradicional (1 só carrinho, 1 só mola) (modo acústico)





(cópia de x_1)

Segundo modo normal

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \Rightarrow \overleftrightarrow{K} - \omega^2 \overleftrightarrow{M} = \begin{bmatrix} -k & -k \\ -k & -k \end{bmatrix}$$

e

$$-k \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow a_1 = -a_2 = Ae^{-i\delta}$$

Logo,

$$\overleftrightarrow{z}(t) = \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} e^{i(\omega_2 t - \delta)} \quad e$$

$$\overleftrightarrow{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} \cos(\omega_2 t - \delta), \text{ ou}$$

$x_1(t) = A \cos(\omega_2 t - \delta)$
$x_2(t) = -A \cos(\omega_2 t - \delta)$ (segundo modo normal)

Os 2 carrinhos oscilam com a mesma amplitude e fases opostas. Quando as molas externas estão esticadas, a interna está comprimida do dobro, o que faz com que cada carrinho se mova como que sob a ação de uma única mola de constante $3k$. (modo óptico)

Solução geral

Os 2 modos normais são independentes e satisfazem à eq. de movimento (linear e homogênea) $\overleftrightarrow{M}\ddot{\vec{x}} = -\overleftrightarrow{K}\vec{x}$ para quaisquer valores das 4 constantes A_1, A_2, δ_1 e δ_2. Como esta é de fato composta por 2 eq. diferenciais de 2ª ordem, a solução geral (com 4 constantes arbitrárias) é

$$\vec{x}(t) = A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cos(\omega_1 t - \delta_1) + A_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cos(\omega_2 t - \delta_4$$

É difícil visualizar a solução geral. O movimento de cada carrinho é uma mistura das 2 frequências ω_1 e ω_2. Como $\omega_2 = \sqrt{3}\,\omega_1$, o movimento nunca se repete, exceto no caso particular em que A_1 ou $A_2 = 0$ (modo normal).

Coordenadas normais

Em qualquer movimento possível do sistema, as 2 coordenadas (x_1 e x_2) variam com o tempo. É possível introduzir coordenadas alternativas que embora sejam menos transparentes fisicamente (de significado) têm a propriedade conveniente de que uma pode variar sem que a outra o faça. São chamadas de coordenadas normais e a afirmativa acima é verdadeira para qualquer sistema de osciladores acoplados. Em nosso caso, podemos caracterizar as posições dos carrinhos com as coordenadas (normais)

$$\xi_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad e$$
$$\xi_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$$

No primeiro modo normal,

$$\xi_1(t) = A\cos(\omega_1 t - \delta)$$
$$\xi_2(t) = 0 \quad , e$$

no segundo

$$\xi_1(t) = 0$$
$$\xi_2(t) = A\cos(\omega_2 t - \delta)$$

Neste sentido, elas são independentes: uma pode oscilar enquanto a outra não se move. O movimento geral é uma superposição dos 2 modos ⇒ ambas oscilam, ξ_1 com frequência ω_1 e ξ_2 com ω_2.

Em alguns problemas complicados, as coordenadas normais podem representar simplificação considerável.

11.3 Dois osciladores acoplados fracamente

Este é um sistema no qual algumas oscilações mas normais são fáceis de visualizar e que dá origem a um fenômeno (acústico) interessante.

Considere o sistema da seção anterior, mas agora com $k_1 = k_3 = k$ e $k_2 \ll k$.

Os modos normais são fáceis de obter:

$$\overleftrightarrow{K} = \begin{bmatrix} k+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k+k_2 \end{bmatrix}, \text{ e}$$

$$\overleftrightarrow{K} - \omega^2 \overleftrightarrow{M} = \begin{bmatrix} k+k_2-m\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k+k_2-m\omega^2 \end{bmatrix},$$

$$\det\left(\overleftrightarrow{K} - \omega^2 \overleftrightarrow{M}\right) = (k+k_2-m\omega^2)^2 - (k_2^2) =$$
$$= (k-m\omega^2)(k+2k_2-m\omega^2) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{e} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k_2}{m}}, \quad (\omega_2 \simeq \omega_1)$$

com visualização e interpretação similares ao caso anterior. Vamos definir

$$\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}, \quad \text{e} \quad \begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0 - \epsilon \\ \omega_2 &= \omega_0 + \epsilon \end{aligned}$$

Os 2 modos normais podem agora ser escritos

$$\overleftrightarrow{z}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i(\omega_0 - \epsilon)t} \quad \text{e}$$

$$C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{i(\omega_0 + \epsilon)t}, \text{ e a solução geral}$$

$$\overleftrightarrow{z}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i(\omega_0 - \epsilon)t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{i(\omega_0 + \epsilon)t}$$

As constantes C_1 e C_2 são determinadas pelas condições iniciais

Para visualizar algumas características desta solução geral, é bom escrevê-la na forma

$$\overleftrightarrow{z}(t) = \left\{ C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-i\epsilon t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{i\epsilon t} \right\} e^{i\omega_0 t}$$

Como ϵ é muito pequeno, o termo matricial varia muito devagar comparado com o segundo termo, $e^{i\omega_0 t}$. Num intervalo de tempo razoavelmente pequeno, o 1º termo é essencialmente constante e a solução se comporta como $\overleftrightarrow{z}(t) = \overleftrightarrow{a}\, e^{i\omega_0 t}$, com $\overleftrightarrow{a}$ constante. Isto é, durante este intervalo de tempo pequeno os 2 carrinhos oscilam harmonicamente com frequência angular ω_0. Mas se esperarmos tempo suficiente, $\overleftrightarrow{a}$ vai variar lentamente e os detalhes dos movimentos dos carrinhos vão mudar.

Vamos explorar o comportamento da solução acima para alguns valores simples de C_1 e C_2. Se $C_1 = 0$ ou $C_2 = 0$, a solução é um dos modos normais. Um caso + interessante é quando $C_1 = C_2 = \frac{A}{2}$ (real). Neste caso, a solução se escreve

$$\overleftrightarrow{z}(t) = \frac{A}{2} \begin{bmatrix} e^{-i\epsilon t} + e^{i\epsilon t} \\ e^{-i\epsilon t} - e^{i\epsilon t} \end{bmatrix} e^{i\omega_0 t} =$$

$$= A \begin{bmatrix} \cos \epsilon t \\ -i \operatorname{sen} \epsilon t \end{bmatrix} e^{i\omega_0 t}$$

O movimento é dado pela parte real desta matriz,

$\overleftrightarrow{x}(t) = \mathrm{Re}\,\overleftrightarrow{z}(t)$, cujos elementos são

$x_1(t) = A \cos \epsilon t \cos \omega_0 t$

$x_2(t) = A \,\mathrm{sen}\, \epsilon t \,\mathrm{sen}\, \omega_0 t$

Esta solução tem uma interpretação simples e elegante. Em $t=0$, $x_1(0) = A$ e $\dot{x}_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0$: a solução descreve o movimento provocado quando o carrinho 1 é puxado uma distância A para a direita e abandonado em $t=0$, com o carrinho 2 estacionário na posição de equilíbrio. Como $\epsilon \ll 1$, as funções $\cos \epsilon t$ e $\mathrm{sen}\, \epsilon t$ não se alteram enquanto $0 \leq \epsilon t \ll 1 \Rightarrow 0 \leq t \ll \frac{1}{\epsilon}$. Isto é, durante este intervalo de tempo $\cos \epsilon t \simeq 1$ e $\mathrm{sen}\, \epsilon t \simeq 0$, e temos

$x_1(t) \approx A \cos \omega_0 t$

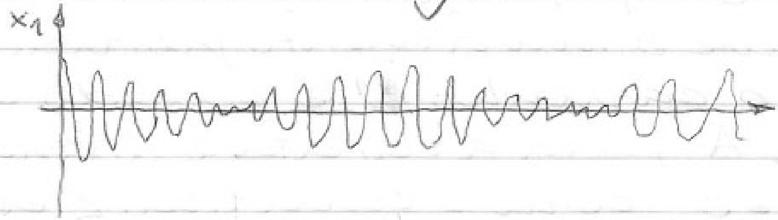
$x_2(t) \approx 0 \qquad (t \ll 1/\epsilon)$

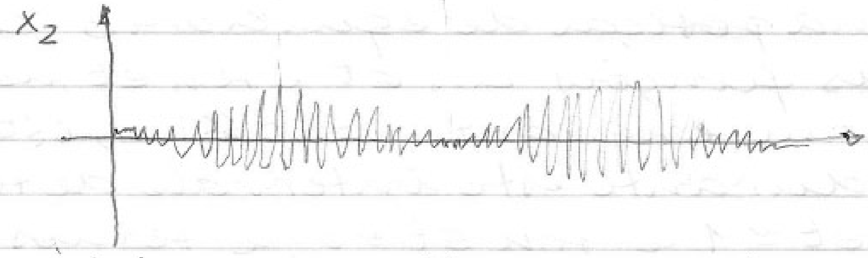
Inicialmente o carrinho 1 oscila com amplitude A e frequencia ω_0 enquanto o carrinho 2 fica parado. Esta situação não dura para sempre; quando $\mathrm{sen}\, \epsilon t$ se torna apreciável, o carrinho 2 também oscila com frequencia ω_0. Enquanto o fator $\mathrm{sen}\, \epsilon t$ cresce (para 1) em $x_2(t)$, $\cos \epsilon t$ em $x_1(t)$ decresce (isto tem que ocorrer para que a energia se conserve). Quando $t = \frac{\pi}{2\epsilon}$, o fator $\mathrm{sen}\, \epsilon t = 1$ (e $\cos \epsilon t = 0$) e durante um certo intervalo teremos

$x_1(t) = 0$

$x_2(t) = A \,\mathrm{sen}\, \omega_0 t \qquad (t \approx \pi/2\epsilon)$

Este processo, no qual os carrinhos passam energia de 1 para o outro continuamente, prossegue indefinidamente - ou até que forças dissipativas, que aqui estamos ignorando, retirem do sistema toda sua energia.





Note a semelhança destes gráficos com o fenômeno do batimento. Estes são o resultado da superposição de 2 ondas - sonoras, por exemplo - com frequencias quase iguais. Por causa desta pequena diferença de frequencias, as 2 ondas tem diferença de fase que se move regularmente de 0 a 2π, em cada local. Isto significa que a interferência resultante é alternadamente construtiva e destrutiva, e um gráfico do sinal resultante se parece com um qualquer dos gráficos acima.

Para entender melhor de onde vem o batimento neste caso, precisamos considerar outra vez as coordenadas normais $\xi_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ e $\xi_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$. Para a soluçaõ que estamos examinando, elas saõ

$$\xi_1(t) = \frac{1}{2} A\,(\cos\epsilon t \cos\omega_0 t + \operatorname{sen}\epsilon t \operatorname{sen}\omega_0 t)$$

e $$\xi_2(t) = \frac{1}{2} A\,(\cos\epsilon t \cos\omega_0 t - \operatorname{sen}\epsilon t \operatorname{sen}\omega_0 t)$$

ou

$$\xi_1(t) = \frac{1}{2} A \cos(\omega_0 - \epsilon)t = \frac{1}{2} A \cos\omega_1 t$$
$$\xi_2(t) = \frac{1}{2} A \cos(\omega_0 + \epsilon)t = \frac{1}{2} A \cos\omega_2 t.$$

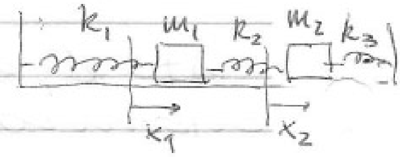
Isto é, as 2 coordenadas normais oscilam com igual amplitude, a primeira com frequencia ω_1 e a segunda com ω_2, muito próximas. Como $x_1(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t)$, vemos que x_1 é a superposiçaõ de ξ_1 e ξ_2, e o crescimento e diminuiçaõ de $x_1(t)$ é o resultado do batimento entre 2 sinais de frequencias muito próximas. O mesmo se aplica a $x_2(t) = \xi_1 - \xi_2$, e os momentos de interferência construtiva para x_1 saõ de interferência destrutiva para x_2 (e vice-versa).

— 22/06/09 —

11.4 Abordagem lagrangiana: o pêndulo duplo

A análise do problema das oscilações acopladas de 2 carrinhos foi baseada na eq. de movimento obtida na formulaçaõ newtoniana. O estudo de sistemas + complexos torna cada vez maior a vantagem da formulaçaõ lagrangeana. Vamos obter as eq. de movimento do problema anterior na formulação lagrangeana, e em seguida faremos o mesmo para outro sistema simples com 2 graus de liberdade, o pendulo duplo.

Abordagem lagrangiana para 2 carrinhos entre 3 molas.



$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

Elongação das 3 molas:

$$x_1, \quad x_2 - x_1, \quad -x_2$$

Energia potencial:

$$U = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 x_2^2$$

$$= \frac{1}{2} (k_1 + k_2) x_1^2 - k_2 x_1 x_2 + \frac{1}{2} (k_2 + k_3) x_2^2$$

Equações de Lagrange:

x_1:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = -(k_1 + k_2) x_1 + k_2 x_2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1$$

$$\Rightarrow \quad m_1 \ddot{x}_1 = -(k_1 + k_2) x_1 + k_2 x_2$$

x_2:

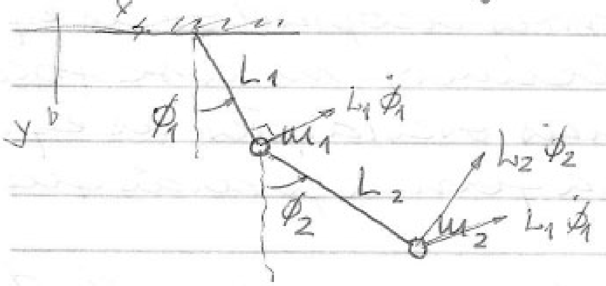
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = k_2 x_1 - (k_2 + k_3) x_2$$

$$\Rightarrow \quad m_2 \ddot{x}_2 = k_2 x_1 - (k_2 + k_3) x_2 ,$$

equações já obtidas anteriormente

O pendulo duplo

Eis aqui outro sistema simples, para o qual a abordagem lagrangiana é bem + vantajosa.



$$x_1 = L_1 \operatorname{sen}\phi_1$$
$$y_1 = L_1 \cos\phi_1$$
$$x_2 = L_1 \operatorname{sen}\phi_1 + L_2 \operatorname{sen}\phi_2$$
$$y_2 = L_1\cos\phi_1 + L_2\cos\phi_2$$

$$\dot x_1 = L_1\dot\phi_1\cos\phi_1 \qquad \dot y_1 = -L_1\dot\phi_1\operatorname{sen}\phi_1$$
$$\dot x_1^2 + \dot y_1^2 = (L_1\dot\phi_1)^2$$

$$\dot x_2 = L_1\dot\phi_1\cos\phi_1 + L_2\dot\phi_2\cos\phi_2$$
$$\dot y_2 = -L_1\dot\phi_1\operatorname{sen}\phi_1 - L_2\dot\phi_2\operatorname{sen}\phi_2$$
$$\dot x_2^2 + \dot y_2^2 = (L_1\dot\phi_1)^2 + (L_2\dot\phi_2)^2 + 2L_1L_2\dot\phi_1\dot\phi_2(\underbrace{\cos\phi_1\cos\phi_2 + \operatorname{sen}\phi_1\operatorname{sen}\phi_2}_{\cos(\phi_1-\phi_2)})$$

$$T = \frac{1}{2}m_1(L_1\dot\phi_1)^2 + \frac{1}{2}m_2\left[(L_1\dot\phi_1)^2 + (L_2\dot\phi_2)^2 + 2L_1L_2\dot\phi_1\dot\phi_2\cos(\phi_1-\phi_2)\right]$$

$$U = -m_1 g y_1 - m_2 g y_2 = -m_1 g L_1\cos\phi_1 - m_2 g(L_1\cos\phi_1 + L_2\cos\phi_2)$$
$$= -(m_1+m_2)gL_1\cos\phi_1 - m_2 g L_2\cos\phi_2$$

Podemos agora obter as eq. de Lagrange, que são complicadas, pouco transparentes e não tem solução analítica. Esta situação lembra a do pêndulo simples, cuja eq. de movimento também não tem solução analítica. Nos 2 casos, a aproximação útil + simples é a de pequenos ângulos. Para quase todos os sistemas oscilantes acoplados, as eq. exatas não são solúveis, mas se focalizarmos pequenas oscilações as eq. se reduzem a uma forma padrão que é solúvel.

Vamos, portanto, supor que ϕ_1, ϕ_2, $\dot\phi_1$ e $\dot\phi_2$ sejam pequenos para todo t. Isto nos permite simplificar as expressões para T e U usando expansões de Taylor e ignorando termos proporcionais à 3ª potencia - ou maior - das quantidades pequenas.

Na expressão para T, o termo cruzado
$$m_2 L_1 L_2 \dot\phi_1 \dot\phi_2 (\underbrace{\cos\phi_1 \cos\phi_2}_{\simeq 1-\phi_1^2/2} + \underbrace{\operatorname{sen}\phi_1 \operatorname{sen}\phi_2}_{\simeq \phi_1})$$
$\simeq m_2 L_1 L_2 \dot\phi_1 \dot\phi_2$ (todos os demais são de ordem superior). Logo,

$$T = \frac{1}{2}(m_1+m_2) L_1^2 \dot\phi_1^2 + m_2 L_1 L_2 \dot\phi_1 \dot\phi_2 + \frac{1}{2} m_2 L_2^2 \dot\phi_2^2$$

A energia potencial:
$$U \simeq -(m_1+m_2) g L_1 \left(1-\frac{\phi_1^2}{2}\right) - m_2 g L_2 \left(1-\frac{\phi_2^2}{2}\right)$$
$$= (m_1+m_2) g L_1 \frac{\phi_1^2}{2} + m_2 g L_2 \frac{\phi_2^2}{2} + \text{constante}$$

Antes de obter as eq. de movimento,

Vamos ver o que conseguimos com a aproximação de pequenas oscilações.
A expressão exata para T era uma ~~equ~~ função transcendente das coordenadas ϕ_1 e ϕ_2 e das velocidades $\dot{\phi}_1$ e $\dot{\phi}_2$. A aproximação de pequenos ângulos a reduziu a uma função homogênea quadrática das 2 velocidades apenas.
A expressão exata para U era uma função transcendente de ϕ_1 e ϕ_2. A aproximação de pequenos ângulos a reduziu à uma função homogênea quadrática de ϕ_1 e ϕ_2
Estas mesmas simplificações ocorrem para uma ampla classe de sistemas oscilantes: a hipótese de que as oscilações sejam pequenas reduz T a uma função homogênea quadrática das velocidades e U a uma função homogenea quadrática das coordenadas.
A característica simplificadora destas formas quadráticas homogêneas é que elas se reduzem a funções homogeneas lineares por diferenciação, e as eqs. de movimento resultantes são fáceis de resolver.
Vamos obter as eqs. Lagrange para o sistema em tela:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_1} = -(m_1+m_2)\, g L_1 \phi_1 = (m_1+m_2) L_1^2 \ddot{\phi}_1 + m_2 L_1 L_2 \ddot{\phi}_2$$

e $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_2} = -m_2 g L_2 \phi_2 = m_2 L_1 L_2 \ddot{\phi}_1 + m_2 L_2^2 \ddot{\phi}_2$

Estas 2 eqs. para ϕ_1 e ϕ_2 podem ser reescritas como uma única equação matricial

$$\overleftrightarrow{M}\ddot{\phi} = -\overleftrightarrow{K}\phi$$

se introduzimos a coluna $\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix}$ e as matrizes 2x2

$$\overleftrightarrow{M} = \begin{bmatrix} (m_1+m_2)L_1^2 & m_2 L_1 L_2 \\ m_2 L_1 L_2 & m_2 L_2^2 \end{bmatrix}$$ e

$$\overleftrightarrow{K} = \begin{bmatrix} (m_1+m_2) g L_1 & 0 \\ 0 & m_2 g L_2 \end{bmatrix}$$

Esta equação matricial é análogo exato de eq. similar obtida para os 2 carrinhos entre 3 molas. Neste caso, a matriz de "massa" $\overleftrightarrow{M}$ não é composta apenas por massas, mas tem o papel de inércia na eq. movimento. (multiplica a derivada segunda das coordenadas). Analogamente, a matriz elástica $\overleftrightarrow{K}$ não é composta por constantes de mola, mas tem papel análogo na eq. movimento.

O procedimento para resolver as eqs. de movimento obtidas é exatamente o mesmo usado anteriormente para os carrinhos: primeiro tentamos encontrar soluções nas quais as 2 coordenadas ϕ_1 e ϕ_2 variem senoidalmente com a mesma frequencia angular ω - os modos normais. Da mesma forma que antes, qualquer soluçaõ deste tipo pode ser escrita como a parte real de uma soluçaõ complexa $z(t)$ cuja dependência temporal é $e^{i\omega t}$ apenas; isto é,

$$\overleftrightarrow{\phi}(t) = \mathrm{Re}\,\overleftrightarrow{z}(t), \text{ com } \overleftrightarrow{z}(t) = \overleftrightarrow{a}\,e^{i\omega t} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} e^{i\omega t}$$

e as 2 componentes de $\overleftrightarrow{a}$ (a_1 e a_2) saõ constantes. Uma funçaõ desta forma satisfaz à eq. movimento se e somente se ω e $\overleftrightarrow{a}$ satisfazem à eq. de autovalores $(\overleftrightarrow{K} - \omega^2 \overleftrightarrow{M})\overleftrightarrow{a} = 0$, que só tem soluçaõ naõ trivial se
$\det(\overleftrightarrow{K} - \omega^2\overleftrightarrow{M}) = 0$, equaçaõ quadrática em ω^2 que determina as 2 frequencias normais do pendulo duplo. Conhecidas estas 2 frequencias, podemos determinar $\overleftrightarrow{a}$ e encontrar os modos normais. O movimento + geral do sistema é uma superposiçaõ arbitrária destes modos normais.

Comprimentos e massas iguais

Isto simplifica a discussaõ: $m_1 = m_2 = m$, $L_1 = L_2 = L$. Chamemos $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow g = L\omega_0^2$ e ficamos com

$$\overleftrightarrow{M} = mL^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \overleftrightarrow{K} = mL^2 \begin{bmatrix} 2\omega_0^2 & 0 \\ 0 & \omega_0^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{K} - \omega^2 \overleftrightarrow{M} = mL^2 \begin{bmatrix} 2(\omega_0^2 - \omega^2) & -\omega^2 \\ -\omega^2 & (\omega_0^2 - \omega^2) \end{bmatrix}$$

As frequências normais são determinadas pela condição $\det(\overleftrightarrow{K} - \omega^2 \overleftrightarrow{M}) = 0$:

$$2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^4 = \omega^4 - 4\omega_0^2\omega^2 + 2\omega_0^4 = 0$$

com soluções

$$\omega^2 = (2 \pm \sqrt{2})\omega_0^2$$

As 2 frequencias normais são

$$\omega_1^2 = (2 - \sqrt{2})\omega_0^2 \quad e \quad \omega_2^2 = (2 + \sqrt{2})\omega_0^2$$

$$(\omega_1 \simeq 0{,}77\,\omega_0) \qquad\qquad (\omega_2 \simeq 1{,}85\,\omega_0)$$

Para encontrar os modos normais, resolvemos a $(\overleftrightarrow{K} - \omega^2 \overleftrightarrow{M})\overleftrightarrow{a} = 0$ para cada uma das frequencias normais.

$\omega = \omega_1 \Rightarrow$

$$\overleftrightarrow{K} - \omega_1^2 \overleftrightarrow{M} = mL^2\omega_0^2(\sqrt{2} - 1) \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$(\overleftrightarrow{K} - \omega_1^2 \overleftrightarrow{M})\overleftrightarrow{a} = 0 \Rightarrow 2a_1 - \sqrt{2}\,a_2 = 0$$

$$\Rightarrow a_2 = \sqrt{2}\,a_1$$

Se escrevermos

$a_1 = A_1 e^{-i\delta_1}$, as 2 coordenadas são

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{bmatrix} = \operatorname{Re} \overleftrightarrow{a} e^{i\omega_1 t} = A_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \cos(\omega_1 t - \delta_1)$$

(primeiro modo normal)

Os 2 pendulos oscilam em fase, com a amplitude do de baixo $\sqrt{2}$ vezes maior.

$$\omega = \omega_2 \Rightarrow \overleftrightarrow{K} - \omega_2^2 \overleftrightarrow{M} = -mL^2\omega_0^2(\sqrt{2} + 1) \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix},$$

e $a_2 = -\sqrt{2}\,a_1$

Escrevendo $a_1 = A_2 e^{-i\delta_2}$,

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \end{bmatrix} = \mathrm{Re}\, \overleftrightarrow{a}\, e^{i\omega_2 t} = A_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} \cos(\omega_2 t - \delta_2)$$

(segundo modo normal)

ϕ_2 oscila em oposição exata de fase com ϕ_1, outra vez com amplitude $\sqrt{2}$ vezes maior.

A solução geral é uma combinação linear arbitrária dos 2 modos normais.

- 26/06/09 -

11.5 O caso geral

Estudamos em detalhes os modos normais de 2 sistemas e estamos prontos para discutir o caso geral de um sistema com n graus de liberdade oscilando em torno de uma posição de equilíbrio estável. Sua configuração pode ser especificada por n coordenadas generalizadas $q_1, ..., q_n$ (sistema holonômico), que vou abreviar por $\overleftrightarrow{q} = (q_1, ..., q_n)$ – $\overleftrightarrow{q}$ é um vetor no espaço n-dimensional das coordenadas generalizadas.

Vamos supor que o sistema seja conservativo $\Rightarrow$ podemos definir uma energia potencial $U(q_1, ..., q_n) = U(\overleftrightarrow{q})$ e lagrangiana $\mathcal{L} = T - U$.

$T = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{1}{2} m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha^{\,2}$; vamos também supor que $\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q_1, ..., q_n)$ não envolva $\underline{t}$ explicitamente (as coordenadas generalizadas são naturais)

(sec. 7.8)

Vimos no cap. 7 que podemos obter

$$T = T(\overleftrightarrow{q}, \dot{\overleftrightarrow{q}}) = \frac{1}{2}\sum_{j,k} A_{jk}(\overleftrightarrow{q})\,\dot{q}_j \dot{q}_k\,,$$

onde os coeficientes $A_{jk}(\overleftrightarrow{q})$ podem depender de $\overleftrightarrow{q}$. Nestas condições, a forma geral da lagrangiana é $\mathcal{L}(\overleftrightarrow{q}, \dot{\overleftrightarrow{q}}) = T(\overleftrightarrow{q}, \dot{\overleftrightarrow{q}}) - U(\overleftrightarrow{q})$, com $U(\overleftrightarrow{q})$ uma função ainda não especificada das coordenadas $\overleftrightarrow{q}$.

Nossa hipótese final sobre o sistema é que ele está executando pequenas oscilações em torno de uma configuração de equilíbrio estável. Podemos redefinir as coordenadas, se necessário, para que nesta posição de equilíbrio $\overleftrightarrow{q} = 0$ (isto é, $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$). Como estamos interessados apenas em pequenas oscilações, só precisamos nos preocupar com pequenos valores das coordenadas $\overleftrightarrow{q}$, e usar expansões de Taylor de U e T em torno do ponto de equilíbrio $\overleftrightarrow{q} = 0$. Para U teremos:

$$U(\overleftrightarrow{q}) = U(0) + \sum_j \frac{\partial U}{\partial q_j} q_j + \frac{1}{2}\sum_{j,k} \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k} q_j q_k + \dots$$

com todas as derivadas calculadas em $\overleftrightarrow{q} = 0$. Esta expressão pode ser simplificada. Como $U(0)$ é constante, podemos abandoná-la redefinindo o zero de energia potencial. Como $\overleftrightarrow{q} = 0$ é de equilíbrio, $\frac{\partial U}{\partial q_j} = 0$. Vamos renomear $\frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k} = K_{jk}$ $(= K_{kj})$ e ignorar

termos de ordem maior que 2 em $\overleftrightarrow{q}$ ou $\dot{\overleftrightarrow{q}}$.
Isto reduz U a

$$U = U(\overleftrightarrow{q}) = \frac{1}{2}\sum_{j,k} K_{jk}\, q_j q_k$$

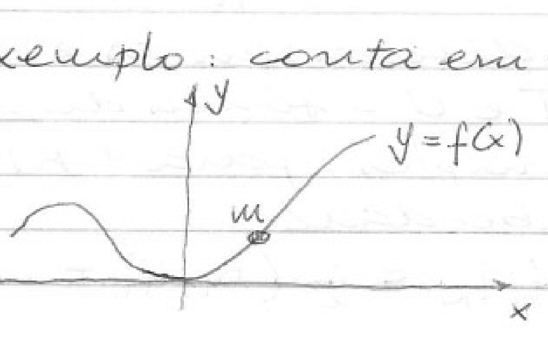
A energia cinética é mais simples ainda. Todos os seus termos contém fator $\dot{q}_j \dot{q}_k$, já de 2ª ordem. Portanto, podemos ignorar todos os termos da expansão de $A_{jk}(\overleftrightarrow{q})$ que não sejam constantes. Vamos chamá-los de $A_{jk}(0) = M_{jk}$, o que reduz a energia cinética a

$$T = T(\dot{\overleftrightarrow{q}}) = \frac{1}{2}\sum_{j,k} M_{jk}\, \dot{q}_j \dot{q}_k \quad , \text{ e}$$

$$\mathcal{L}(\overleftrightarrow{q}, \dot{\overleftrightarrow{q}}) = T(\dot{\overleftrightarrow{q}}) - U(\overleftrightarrow{q})$$

As aproximações feitas correspondem ao que fizemos no problema do pêndulo duplo, e correspondem a reduzir a energia cinética a uma função homogênea quadrática das velocidades $\dot{\overleftrightarrow{q}}$ e a energia potencial a uma função homogênea quadrática das coordenadas $\overleftrightarrow{q}$. Isto garante que as eq. de movimento serão eqs. lineares solúveis

Exemplo: conta em fio rígido



(mínimo na origem)
Sistema com 1 grau de liberdade: coordenada x.

$U = mgy = mgf(x)$

Para pequenas oscilações (em torno do equilíbrio), expandimos $f(x)$ em série de Taylor: $f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \ldots$, e

$$U = mgf(x) \simeq \frac{1}{2} mg f''(0) . x^2 \quad (f(0) = f'(0) = 0)$$

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) , \quad \dot{y} = f'(x) . \dot{x}$$

$$\Downarrow$$

$$T = \frac{1}{2} m \left[1 + f'(x)^2 \right] \dot{x}^2$$

(e a expressão exata de T depende de $\dot{x}$ e de x). Como T já contém termo $\dot{x}^2$, na aproximação de pequenas oscilações podemos simplesmente substituir $f'(x)$ por seu valor no equilíbrio (zero!), resultando

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

Como esperado a aproximação de pequenas oscilações reduziu U e T a funções quadráticas homogêneas de x (U) e $\dot{x}$ (T)

A eq. de movimento

Retornemos a lagrangiana aproximada obtida no caso geral para escrever as (n) eqs. de movimento $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$, $i = 1, \ldots, n$.

Para isto devemos diferenciar as expressões obtidas para T e U - somas duplas. Como exemplo simples: para 1 sistema com 2 graus de liberdade,

$$U = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{2} K_{jk} q_j q_k = \frac{1}{2} \left(K_{11} q_1^2 + \right.$$

$K_{12} q_1 q_2 + K_{21} q_2 q_1 + K_{22} q_2^2 \big) =$

$= \frac{1}{2} \left(K_{11} q_1^2 + 2 K_{12} q_1 q_2 + K_{22} q_2^2 \right), \quad (K_{12} = K_{21})$

e

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = K_{11} q_1 + K_{12} q_2$$

De modo geral,

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = \sum_j K_{ij} q_j \qquad (i = 1, \dots, n)$$

Demonstração:

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \sum_{j,k} K_{jk} \Big[\underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial q_i}}_{\delta_{ij}} q_k + q_j \underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial q_i}}_{\delta_{ik}} \Big]$$

$$= \frac{1}{2} \Big[\sum_{j,k} K_{jk} \delta_{ij} q_k + \sum_{j,k} K_{jk} q_j \delta_{ik} \Big]$$

$$= \frac{1}{2} \Big[\sum_k K_{ik} q_k + \sum_j \underbrace{K_{ji}}_{K_{ij}} q_j \Big] = \sum_j K_{ij} q_j$$

E algo semelhante resulta para $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$.

As $\underline{n}$ eqs. de Lagrange são

$$\sum_j M_{ij} \ddot{q}_j = - \sum_j K_{ij} q_j \quad , \; i = 1, \dots, n$$

que podem ser agrupadas numa única eq. matricial

$$\overleftrightarrow{M} \, \overleftrightarrow{\ddot{q}} = - \overleftrightarrow{K} \, \overleftrightarrow{q} \,, \quad \text{onde}$$

$\overleftrightarrow{q}$ é a coluna $(n \times 1)$

$$\overleftrightarrow{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix},$$

$\overleftrightarrow{M}$ e $\overleftrightarrow{K}$ são as matrizes "massa" e "constante elástica" formadas pelos números M_{ij} e K_{ij}.

A partir deste ponto, estas matrizes são tudo o que precisamos - nem precisamos + escrever a lagrangiana ou as eq.s de Lagrange, já que podemos obtê-las diretamente das expressões aproximadas de T e U.

A eq. matricial obtida é a equivalente n-dimensional às eqs. bidimensionais obtidas para os problemas dos carrinhos e dos pêndulo duplo, e é resolvida da mesma forma. Primeiro buscamos os modos normais:

$$\overleftrightarrow{q}(t) = \mathrm{Re}\,\overleftrightarrow{z}(t), \qquad \overleftrightarrow{z}(t) = \overleftrightarrow{a}\, e^{i\omega t}$$

onde $\overleftrightarrow{a}$ é coluna ($n \times 1$) constante, o que nos leva à eq. de autovalores

$$(\overleftrightarrow{K} - \omega^2 \overleftrightarrow{M})\,\overleftrightarrow{a} = 0,$$

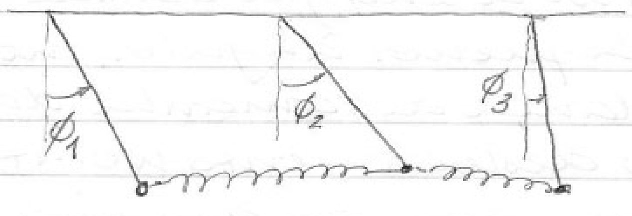
que só tem soluções não triviais se ω satisfaz à eq. característica ou secular

$$\det(\overleftrightarrow{K} - \omega^2 \overleftrightarrow{M}) = 0,$$

que é uma eq. polinomial de grau $\underline{n}$ em ω^2 $\Rightarrow$ tem $\underline{n}$ soluções, que são as frequências normais do sistema. Para cada uma delas, a eq. de autovalores determina o movimento no modo normal correspondente. O movimento + geral do sistema é combinação linear arbitrária dos modos normais.

11.6 Três pêndulos acoplados

Como um (último) exemplo de uso desta técnica, considere 3 pêndulos idênticos acoplados por 2 molas também idênticas.



No equilíbrio, $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$

O procedimento sistemático - e + seguro - seria escrever as expressões exatas para T e U e então fazer a aproximação de pequenos ângulos. Na prática, encontrar estas expressões exatas pode resultar muito trabalhoso - no exemplo presente, a energia potencial elástica depende da elongação das molas, mas uma expressão exata para seus comprimentos, válida para quaisquer ângulos, é muito intrincada. Com frequência é possível, procedendo-se com cuidado, escrever-se a aproximação de pequenos ângulos para T e U diretamente, como aqui faremos.

A energia cinética é

$$T = \frac{1}{2} m L^2 \left(\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2 + \dot{\phi}_3^2 \right),$$ que não requer nenhuma aproximação.

A energia potencial gravitacional de cada pêndulo, medida em relação ao equilíbrio, é $mgL(1-\cos\phi) \simeq$

$\simeq \frac{1}{2} mgL\phi^2$, a conhecida aproximação de pequenos ângulos; portanto,

$$U_{grav} = \frac{1}{2} mgL(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2)$$

Para encontrar a energia elástica na aproximação de pequenos ângulos, notemos que a mudança de tamanho das molas vem do deslocamento horizontal dos pêndulos, cada um dos quais se move de uma distância $\simeq L\phi$ para a direita. Logo, a mola da esquerda está distendida de $\simeq L(\phi_2 - \phi_1)$, e

$$U_{elástica} = \frac{1}{2} kL^2 \left[(\phi_2 - \phi_1)^2 + (\phi_3 - \phi_2)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} kL^2 (\phi_1^2 + 2\phi_2^2 + \phi_3^2 - 2\phi_1\phi_2 - 2\phi_2\phi_3)$$

Neste ponto, vamos escolher unidades naturais — que fazem com que parâmetros desinteressantes assumam o valor 1: $m = L = 1$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}(\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2 + \dot{\phi}_3^2)$$

$$U = \frac{1}{2} g(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2) + \frac{1}{2} k(\phi_1^2 + 2\phi_2^2 + \phi_3^2 - 2\phi_1\phi_2 - 2\phi_2\phi_3)$$

e os elementos de $\overleftrightarrow{M}$ e $\overleftrightarrow{K}$ podem ser lidos diretamente destas expressões:

$$\overleftrightarrow{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \overleftrightarrow{K} = \begin{bmatrix} g+k & -k & 0 \\ -k & g+2k & -k \\ 0 & -k & g+k \end{bmatrix}$$

Os modos normais têm a forma

$$\overleftrightarrow{\phi}(t) = \mathrm{Re}\, \overleftrightarrow{z}(t) = \mathrm{Re}\, \overleftrightarrow{a}\, e^{i\omega t},$$ com

$\overleftrightarrow{a}$ e ω determinados pela eq. autovalores

$$(\overleftrightarrow{K} - \omega^2 \overleftrightarrow{M})\, \overleftrightarrow{a} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\overleftrightarrow{K} - \omega^2 \overleftrightarrow{M} = \begin{bmatrix} g+k-\omega^2 & -k & 0 \\ -k & g+2k-\omega^2 & -k \\ 0 & -k & g+k-\omega^2 \end{bmatrix}$$

e

$$\det(\overleftrightarrow{K} - \omega^2 \overleftrightarrow{M}) = (g+k-\omega^2)\left[(g+2k-\omega^2)\cdot(g+k-\omega^2) - k^2\right] - k\cdot k\,(g+k-\omega^2) =$$

$$= (g+k-\omega^2)\left[(g+\underbrace{2k}_{k+k}-\omega^2)(g+k-\omega^2) - k^2 - k^2\right]$$

$$= (g+k-\omega^2)\left[(g-\omega^2)(g+2k-\omega^2) + k(g+k-\omega^2) - k^2\right]$$

$$= (g+k-\omega^2)(g-\omega^2)(g+3k-\omega^2)$$

$$\Downarrow$$

$$\omega_1^2 = g \quad , \quad \omega_2^2 = g+k \quad , \quad \omega_3^2 = g+3k$$

Os modos normais:

(i) $\omega_1^2 = g \qquad (\omega_1 = \sqrt{g/L}\,)$

$$\overleftrightarrow{K} - \omega^2 \overleftrightarrow{M} = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad a_1 - a_2 = 0$$
$$-a_2 + a_3 = 0 \Longrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = Ae^{-i\delta}$$

e

$$\phi_1(t) = \phi_2(t) = \phi_3(t) = A\cos(\omega_1 t - \delta) \longrightarrow$$

oscilações em uníssono e molas relaxadas.

(ii) $\omega_2^2 = g + k$

$$\overleftrightarrow{K} - \omega^2 \overleftrightarrow{M} = \begin{bmatrix} 0 & -k & 0 \\ -k & k & -k \\ 0 & -k & 0 \end{bmatrix}$$

$a_2 = 0$

$a_1 + a_3 = 0 \Rightarrow a_1 = -a_3 = Ae^{-i\delta}$:

os 2 pêndulos externos oscilam em oposição de fase e o do meio fica parado.

(iii) $\omega_3^2 = g + 3k$

$$\overleftrightarrow{K} - \omega^2 \overleftrightarrow{M} = \begin{bmatrix} -2k & -k & 0 \\ -k & -k & -k \\ 0 & -k & -2k \end{bmatrix}$$

$2a_1 + a_2 = 0$

$a_2 + 2a_3 = 0 \Rightarrow a_1 = a_3 = -\frac{1}{2}a_2 = Ae^{-i\delta}$.

os 2 pêndulos externos oscilam em fase, enquanto o do meio tem o dobro da amplitude e está em exata oposição de fase.

A solução geral é uma combinação linear arbitrária destes 3 modos normais.