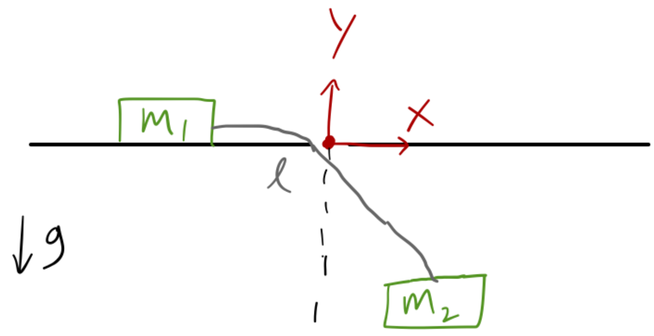
Tutorial: Mecânica Lagrangiana



Duas massas m_1 e m_2 estão ligadas por uma corda de massa desprezível e comprimento ℓ. Como mostra a figura, uma delas se apoia no tampo de uma mesa de atrito desprezível, enquanto a outra está pendurada na borda. Vamos tratar este sistema como **bi-dimensional** , e começaremos usando coordenadas cartesianas (x, y) como mostrado. Note, em particular, que isto significa que o **bloco 2 está livre para oscilar no plano do papel!**

I. Escolha das coordenadas

A. Use as coordenadas cartesianas dos dois blocos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), para escrever equações que representem todos os vínculos a que este sistema está sujeito.

B. Quantos graus de liberdade tem este sistema?

C. Represente um conjunto de coordenadas generalizadas apropriado no diagrama acima. Obtenha as relações entre elas e as coordenadas cartesianas.

D. [Discussão] Ao tratar este sistema como bi-dimensional, estamos *ignorando* as coordenadas z_1 e z_2, sabendo que se $z_1(0) = z_2(0) = 0$, o sistema não se move na direção z. O que se pode dizer sobre a coordenada x_2 - será ela *ignorável*? Porque, ou porque não?

PARE AQUI e converse com o instrutor sobre suas respostas!

II. Construindo o Lagrangiano

Vamos agora prosseguir e escrever o lagrangiano que descreve este sistema.

A. Escreva a energia potencial U em termos das coordenadas cartesianas e use as relações obtidas no item C acima para reescrev-la em termos da coordenadas generalizadas.

B. Calcule as derivadas com relação tempo das coordenadas cartesianas em termos das CGs (e suas derivadas), e use estes resultados para escrever a energia cinética T.

C. Combine suas respostas aos itens A e B para obter o lagrangiano, $\mathcal{L}$.

D. *[Discussão]* Suponha que, em vez de ter um comprimento fixo, a corda que liga os dois blocos esteja enrolada numa bobina no interior do bloco sobre a mesa, e que a partir do instante $t = 0$ começa a desenrolar a uma taxa constante $d\ell/dt = w$. Será que teremos que modificar nossas CGs para levar isto em conta? E como fica agora a energia potencial? E a energia cinética?

PARE AQUI e discuta suas respostas com o instrutor!

III. Estudo do movimento

A. Escreva as equações de Euler-Lagrange para obter as **equações de movimento** (i.e. as acelerações das CGs) deste sistema. Não podemos resolver estas equações analiticamente, mas vamos ver o que podemos descobrir sobre o movimento resultante em certos limites. No que se segue, vamos supor que **o sistema parte do repouso.**

B. Suponha que o bloco 2 inicia seu movimento diretamente abaixo do tampo da mesa, i.e. $x_2(0) = 0$. Mostre que uma das CGs não se altera com o tempo, e escreva uma equação para a aceleração da(s) outra(s) CG(s).

C. Considere agora o que acontece se $x_2(0)$ é não nula, mas é *pequeno.* Retorne às equações de movimento completas e expanda-as em série até **primeira ordem** na CG pequena. (Você pode supor que sua derivada temporal é também pequena.) Mostre que nesta ordem de aproximação você encontra a mesma equção de movimento para a *outra* CG que você encontrou na parte B. Como um teste adicional, mostre que no limite $m_1 \to \infty$, você recupera a equação de movimento de um pêndulo simples na aproximação de pequena amplitude.

D. *[Discussão]* Mesmo para pequenas amplitudes de oscilação, nós continuamos sem poder encontrar uma solução simples para a equação obtida na parte C acima! Usando o que você já sabe sobre a solução e a conservação de energia, construa um raciocínio que mostre que o sistema vai se mover (para amplitudes de oscilação pequenas) como um pêndulo no qual tanto a amplitude como a frequência decrescem com o tempo.

PARE AQUI e discuta suas respostas com o instrutor!