# MECÂNICA GERAL - 1/2017

## Teste 3

**1.** Mostramos em aula que a lagrangiana de um sistema livre de forças externas composto por dois objetos de massas $m_1$ e $m_2$ que interagem através de uma energia potencial $U(r)$ pode ser decomposta em duas parcelas, uma ligada ao movimento do centro de massa do sistema e outra à posição relativa $\vec{r}$. O movimento de $\vec{r}$ é o mesmo que o de uma partícula de massa igual à massa reduzida $\mu$, com posição $\vec{r}$ e energia potencial $U(r)$. Vamos usar estas ideias num problema bidimensional, no qual a coordenada relativa tem componentes polares $r$ e $\phi$, como feito em aula para o problema de Kepler. Naquele caso a energia potencial era a gravitacional, no caso deste problema ela é $U(r) = \frac{1}{2}kr^2$, onde $k$ é uma constante positiva.
(a) Escreva a parcela da lagrangiana associada à posição relativa $\vec{r}$ explicitando sua dependência em termos das componentes $r$ e $\phi$; uma destas componentes é cíclica (ou ignorável) - qual delas, e porque?
(b) Deduza as equações de Lagrange para as componentes polares da posição relativa; a existência de uma coordenada cíclica na lagrangiana está associada a uma lei de conservação - no nosso caso, qual a natureza da quantidade conservada?
(c) Demonstre que existe uma solução para este sistema de equações na qual $r$ é constante, e é proporcional a $(k\mu)^{-\frac{1}{4}}$.

**2.** Um carrinho de massa $m$ pode se mover sobre um trilho que ocupa o raio de uma mesa circular de raio $R$. Uma mola prende o carrinho a um ponto fixo no centro da mesa, de modo que ele pode oscilar sobre o trilho, se aproximando ou se afastando do centro do círculo. A mola tem constante elástica $k$ e comprimento relaxado $l_0 < R$. A mesa é posta a girar no sentido trigonométrico com velocidade angular constante $\omega$. Vamos descrever a dinâmica deste problema no referencial que gira com a mesa.
(a) Neste referencial, determine as forças que agem sobre o carrinho na direção radial e encontre sua resultante em função da distância $x$ do carrinho ao centro da mesa.
(b) Encontre uma função energia potencial $U(x)$ associada a esta força resultante.
(c) Encontre a posição de equilíbrio do carrinho; qual a restrição que deve ser imposta à velocidade angular da mesa $\omega$ para que esta situação seja possível? Justifique!
(d) Expanda a função $U(x)$ em torno da posição de equilíbrio do carrinho e determine a frequência de pequenas oscilações do carrinho em torno desta posição.
(e) Durante uma oscilação do carrinho, para onde aponta a força feita pelo trilho sobre ele quando o carrinho está se afastando do centro da mesa? E quando ele está se aproximando do centro da mesa? Você pode usar um diagrama para exibir suas respostas. Justifique-as com clareza!

**3.** Uma esfera de massa de modelar de raio desprezível e massa $M$ escorrega sobre um piso horizontal sem atrito com velocidade constante $V$. Ela se choca com a extremidade de uma barra de mesma massa e comprimento $L$, que repousa sobre o piso com seu comprimento perpendicular à velocidade da esfera, e ambas grudam.
(a) Determine a velocidade do centro de massa (CM) deste sistema antes e depois da colisão. Justifique suas respostas!
(b) Determine a velocidade angular com que o sistema gira em relação ao CM após a colisão.