

Oscilações

Quantas condições iniciais são necessárias para determinar completamente a solução geral de uma equação diferencial linear de 2ª ordem?

Já que $\cos(\omega t)$ e $\cos(-\omega t)$ são ambas soluções de

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$$

podemos exprimir a solução geral como

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \cos(-\omega t) ?$$

A) sim

B) não

C) ???/depende

Richard Feynman's notebook (Age 14)

4/33

THE MOST REMARKABLE
FORMULA
IN MATH,

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

(FROM SCIENCE HISTORY OF THE UNIVERSE) OF
DERIVED BY EULER

METHOD TO FIGURE THIS IT MUST
BE KNOWN THAT

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

AND $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$

AND $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$

IN THE FIRST LET $x = iu$ AND
THIS REDUCES TO:

$$e^{iu} = \left(1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \dots\right) + i\left(u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \dots\right)$$

NOW WE SUBSTITUTE AND
FIND,

3/33

MISCELLANEOUS FORMULAS.
(FROM VARIOUS SOURCES)

Ex. Pr. 1. $\text{LOG}_e(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \dots$

Ex. Pr. 2. $e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$
NOTE: (0! = 1)

ORAL 3. $e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \dots$
(USE DEFINITION OF VARIOUS)

Ex. Pr. 4. $\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9} \cdot \frac{10 \cdot 10}{9 \cdot 11} \cdot \frac{12 \cdot 12}{11 \cdot 13} \cdot \dots$

ORAL 5. $\frac{\pi}{2} = \frac{2^2}{2 \cdot 1} \cdot \frac{4^2}{4 \cdot 1} \cdot \frac{6^2}{6 \cdot 1} \cdot \frac{8^2}{8 \cdot 1} \cdot \frac{10^2}{10 \cdot 1} \cdot \frac{12^2}{12 \cdot 1} \cdot \frac{14^2}{14 \cdot 1} \cdot \dots$
(CONVERGENCE)

Ex. Pr. 6. $\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \dots$

CONCEPT 7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828 \dots$

Ex. Pr. 8. $\text{LOG}_e P = 2 \left\{ \frac{P-1}{P+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{P-1}{P+1}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{P-1}{P+1}\right)^5 + \dots \right\}$

Ex. Pr. 9. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^h - 1}{h} = \text{LOG}_e x$

? 10. $\sin A \cdot \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)]$

ORAL 11. $\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$

Courtesy of the Archives, California, Institute of Technology.

Figure 3.1-3 Pages From Feynman's Notebooks.

Para um oscilador harmônico simples (massa-mola), o que acontece com o período do movimento se aumentarmos a constante elástica da mola?

- A) aumenta
- B) diminui
- C) não muda
- D) depende!

Num MHS, o que acontece com o período do movimento se aumentamos a massa por um fator 4?

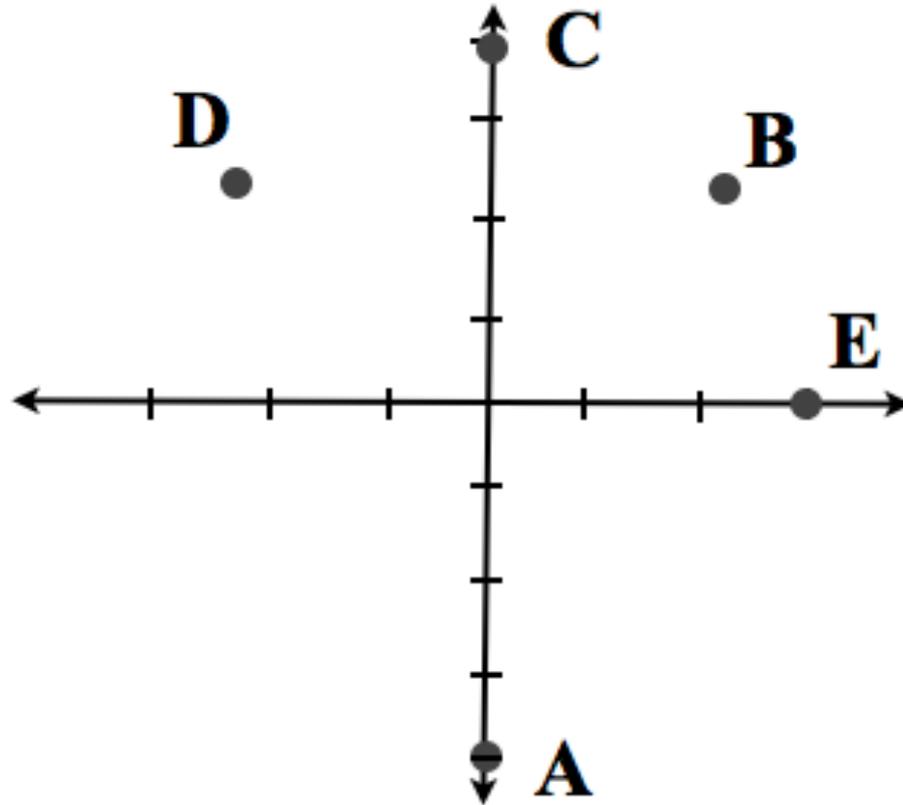
- A) aumenta 2x
- B) aumenta 4x
- C) não muda
- D) diminui 2x
- E) diminui 4x

Na situação anterior, o que acontece com o período do movimento se aumentamos o deslocamento inicial por um fator 4?

- A) aumenta 2x
- B) aumenta 4x
- C) não muda
- D) diminui 2x
- E) diminui 4x

Números Complexos

Qual dos pontos abaixo melhor representa $4e^{i3\pi/4}$ no plano complexo?



Desafio: Mantendo a forma geral $Ae^{i\theta}$, há OUTROS valores de θ que representem este MESMO número complexo? (Se sim, quantos?)

Represente, no plano complexo:

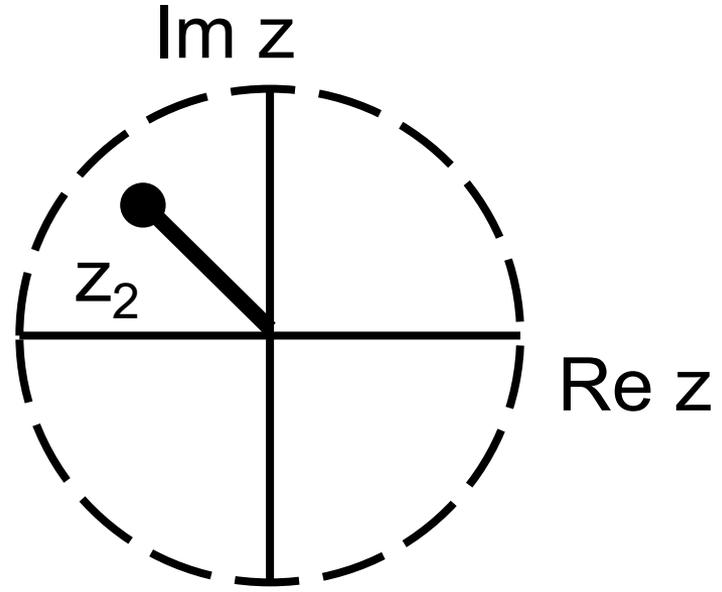
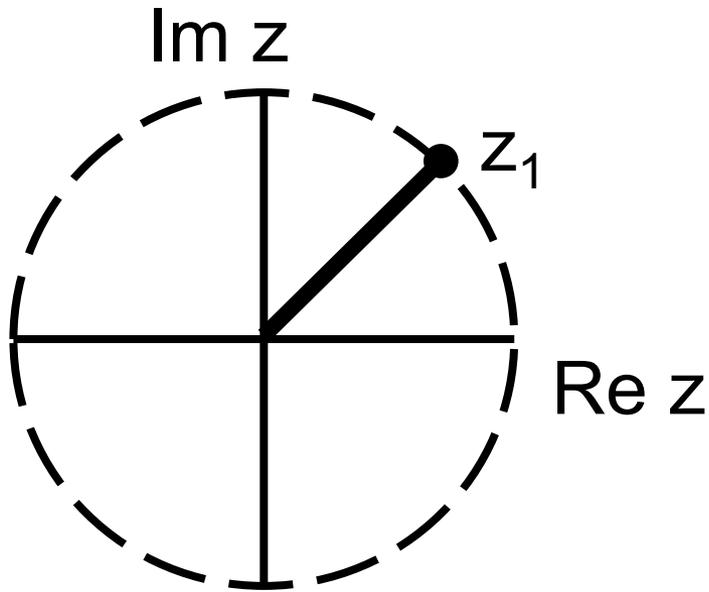
i) $e^{i\pi/6}$

ii) $e^{i\pi/3}$

iii) $e^{i\pi/3} e^{i\pi/6}$

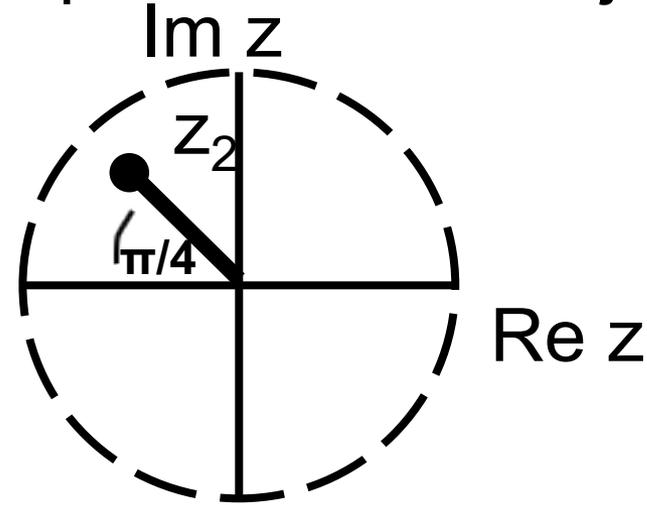
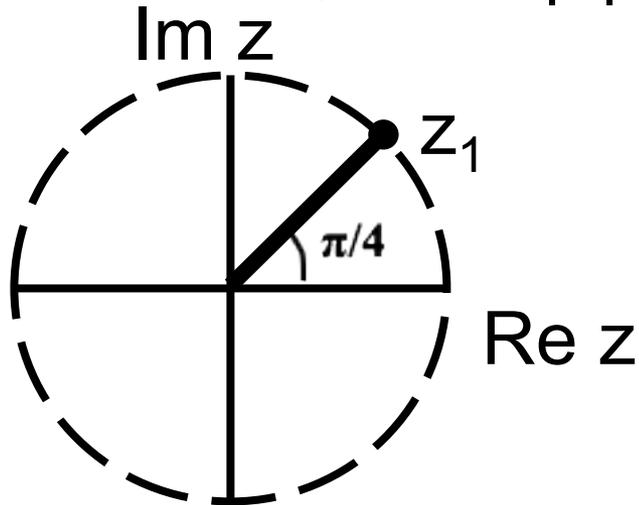
iv) $e^{i\pi/3} / e^{i\pi/6}$

Consider two complex numbers, z_1 and z_2 .
The dotted circle shows the unit circle, where $|z|=1$.

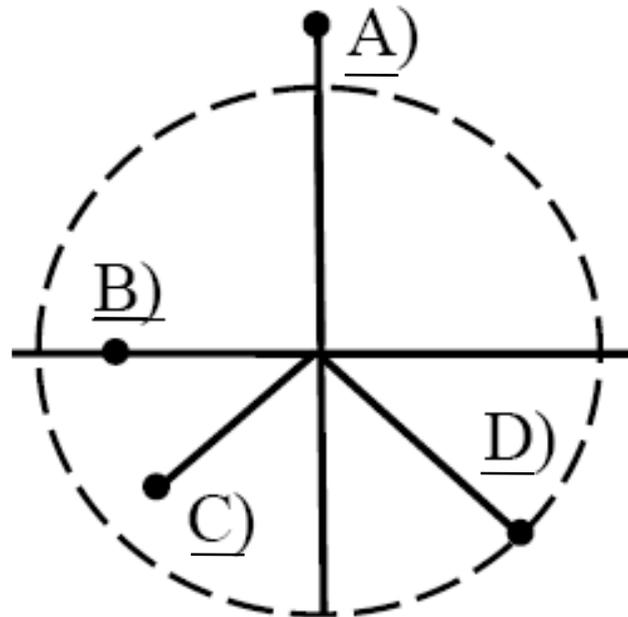


Considere dois números complexos, z_1 e z_2 .

O círculo unitário, onde $|z|=1$, aparece em tracejado.



Que opção mostra o produto $z_1 z_2$?



E) I have no idea

Como se escreve $1/(1+i)$ na forma “polar”?

A) $e^{i \pi/4}$

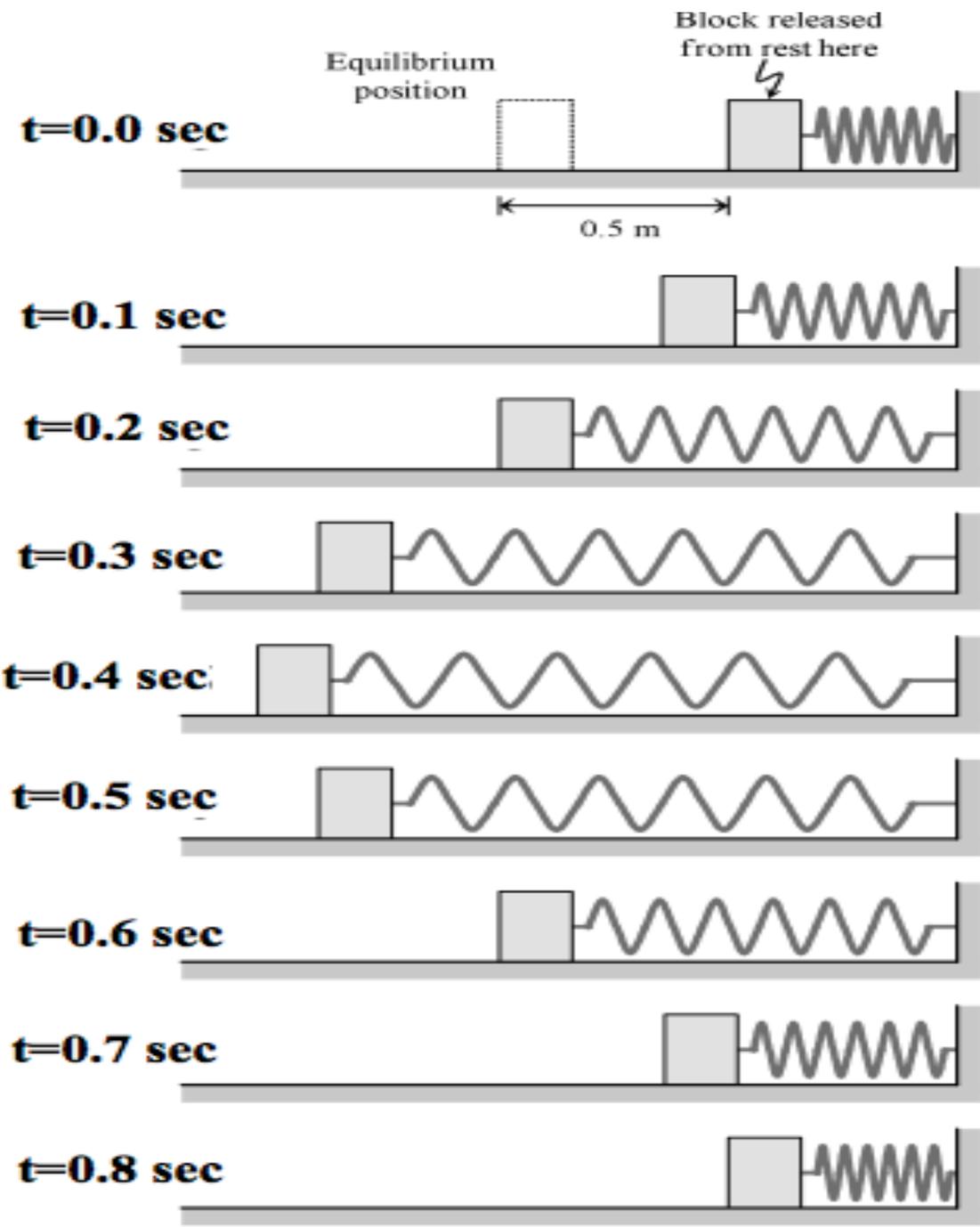
B) $e^{-i \pi/4}$

C) $0.5 e^{i \pi/4}$

D) $0.5 e^{-i\pi/4}$

E) Nenhum destes!

Qual o período do movimento deste bloco?

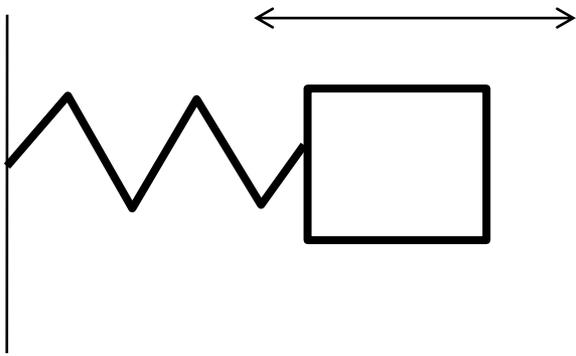


- A) .2 s
- B) .4 s
- C) .6 s
- D) .8 s
- E) Nenhum destes/
falta info!

Uma massa m oscila ligada a uma mola (constante k)

Ela se move entre $x=.1$ m e $x=.5$ m.

A massa está em $x=0.3$ m quando $t=0$ sec, se move até $x=0.5$ m e retorna a $x=0.3$ m quando $t=2$ sec.

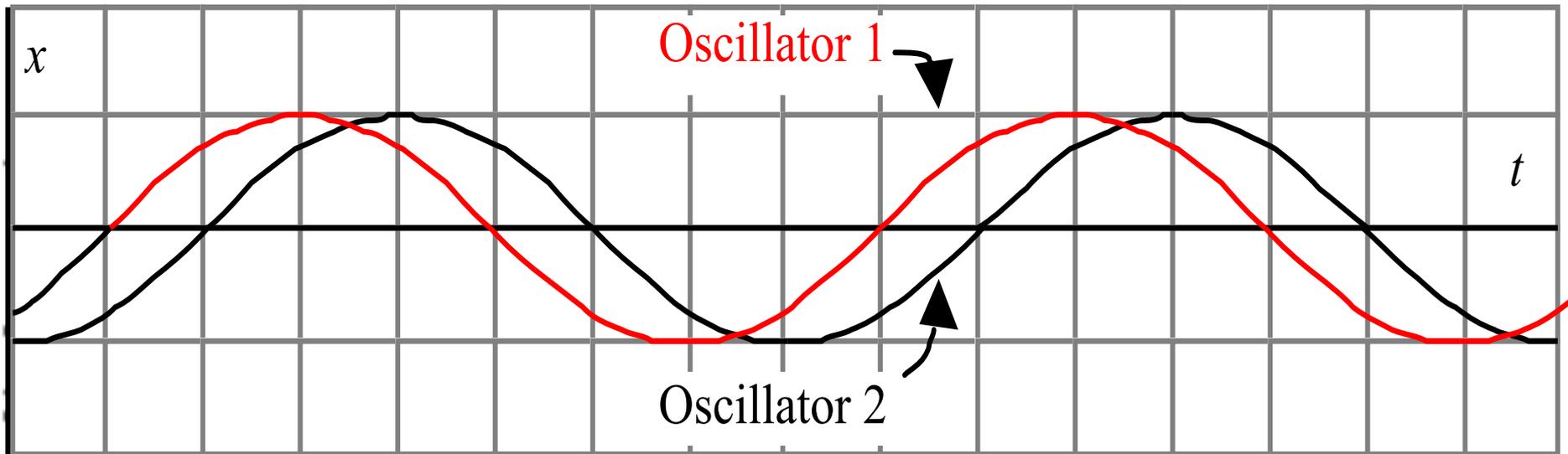


Escreva sua equação horária na forma

$x(t)=x_0+A\cos(\omega t+\varphi)$, e encontre os valores numéricos de x_0 , A , ω , e φ

Em seguida: Escreva a equação horária na forma

$x(t)=x'_0+A'\sin(\omega't+\varphi')$, e encontre os valores numéricos de x'_0 , A' , ω' , and φ'



Os osciladores têm $x_i(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)$ (para $i = 1, 2$)
 Que parâmetros são *diferentes*?

Qual a diferença entre as fases φ_1 e φ_2 ?
 Qual é maior (mais positiva?)

A) φ_1 B) φ_2

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$$

Qual é a solução geral da EDO
onde ω é uma constante conhecida?

A) $x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$

B) $x(t) = C e^{i\omega t} + D e^{-i\omega t}$

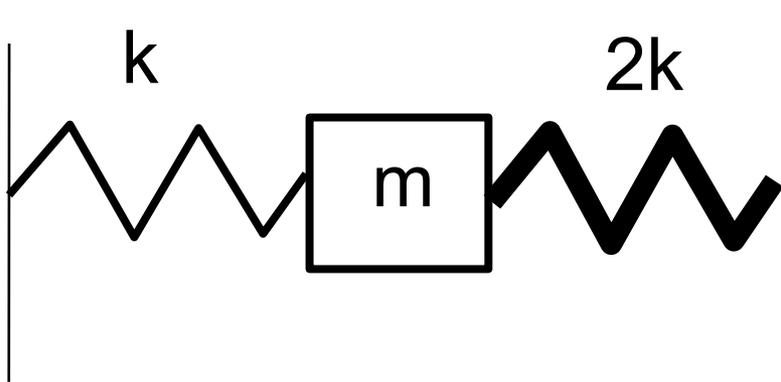
C) $x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t + C e^{i\omega t} + D e^{-i\omega t}$

D) Exactly two of these are fully general!

E) All three of these are fine,
with choice C the most general

Is there any OTHER general form for this solution? How many are there? How many might there be?

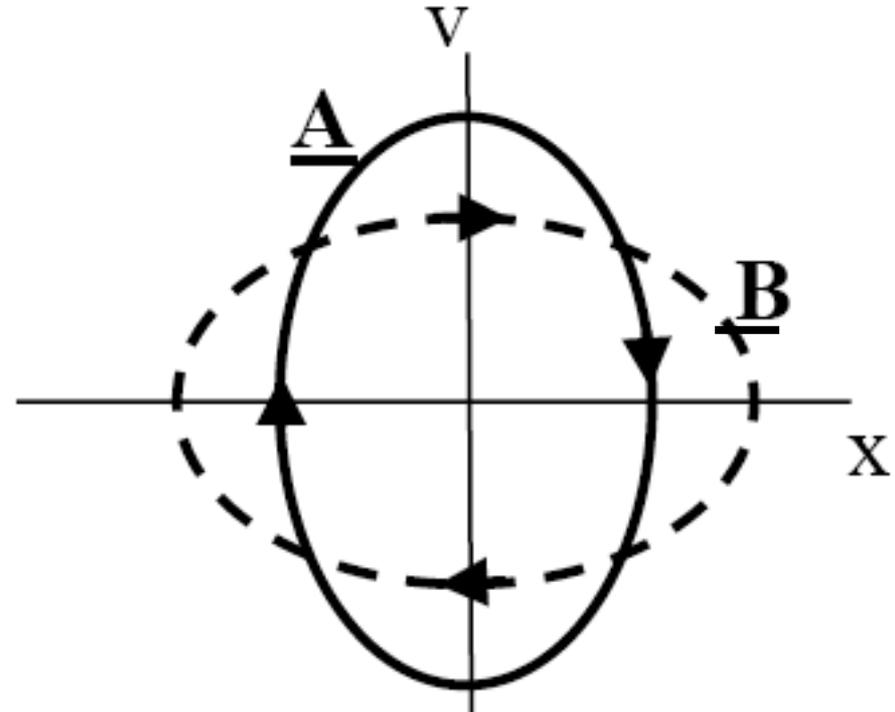
Se o amortecimento é desprezível, e considerando apenas movimento 1D, com que frequência angular a massa m vai oscilar? (A massa está em equilíbrio na posição mostrada)



- A) $\sqrt{k/m}$
- B) $\sqrt{1.5k/m}$
- C) $\sqrt{3k/m}$
- D) $\sqrt{5k/m}$
- E) Nenhum destes!

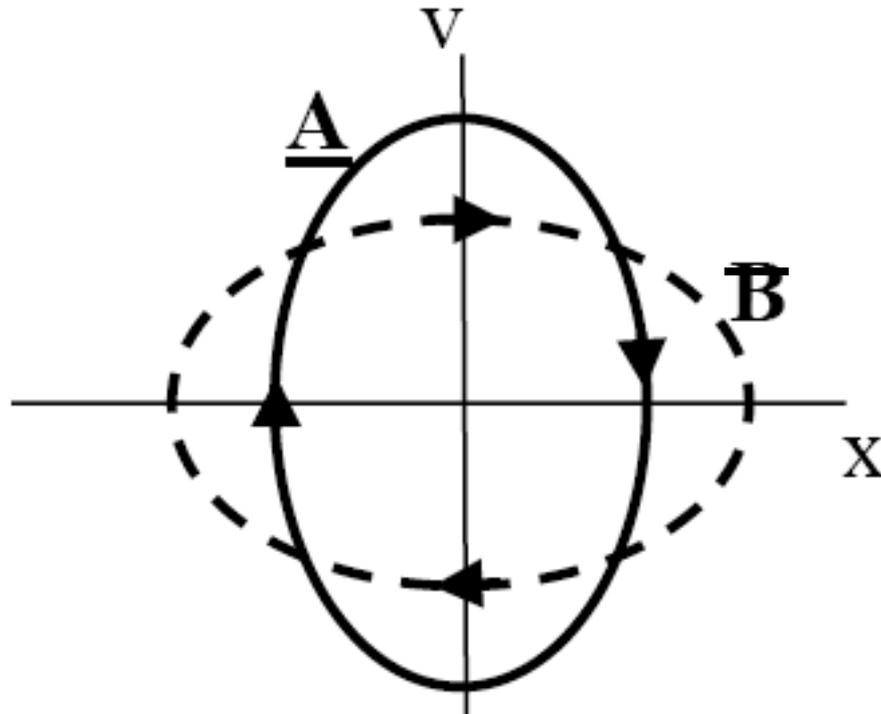
Espaço de Fase

- 1) Os trajetos A e B no espaço de fase descrevem osciladores harmônicos com a mesma massa m . Qual deles descreve o sistema com maior constante elástica k ?



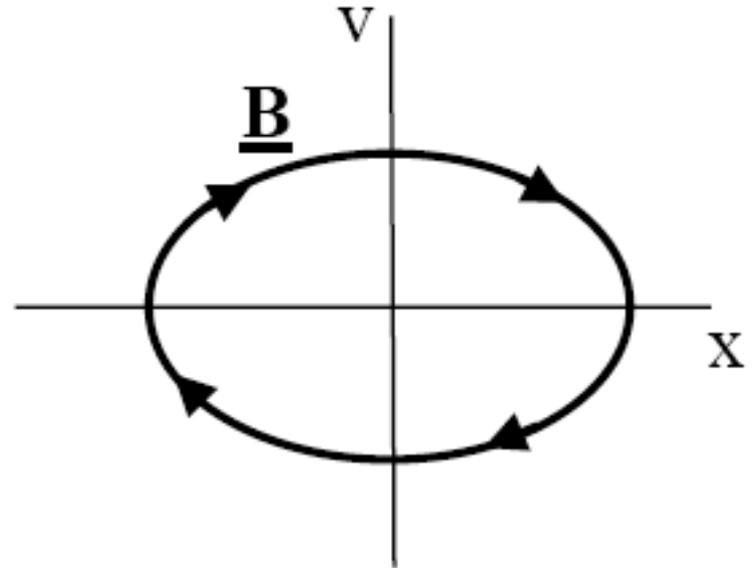
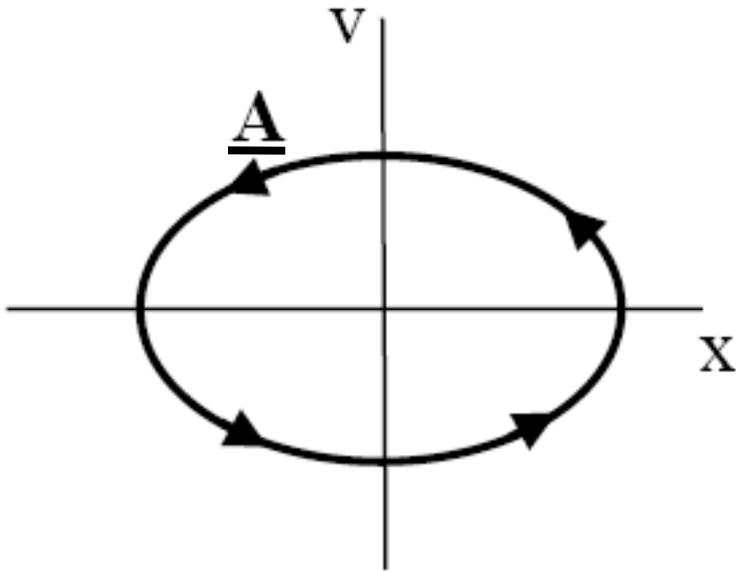
- 2) Como muda o diagrama no espaço de fase se a elongação inicial for maior?
- 3) Como muda o diagrama no espaço de fase se a fase “ δ ” em $x(t)=A\cos(\omega t-\delta)$ mudar?

- 1) Os trajetos A e B no espaço de fase descrevem osciladores harmônicos com a mesma massa m . Qual deles descreve o sistema com maior constante elástica k ?



- C) k é (ou pelo menos pode ser igual nos 2
D) Falta info/???

Os trajetos A e B no espaço de fase descrevem osciladores harmônicos com a mesma massa m .
Qual deles é impossível fisicamente?

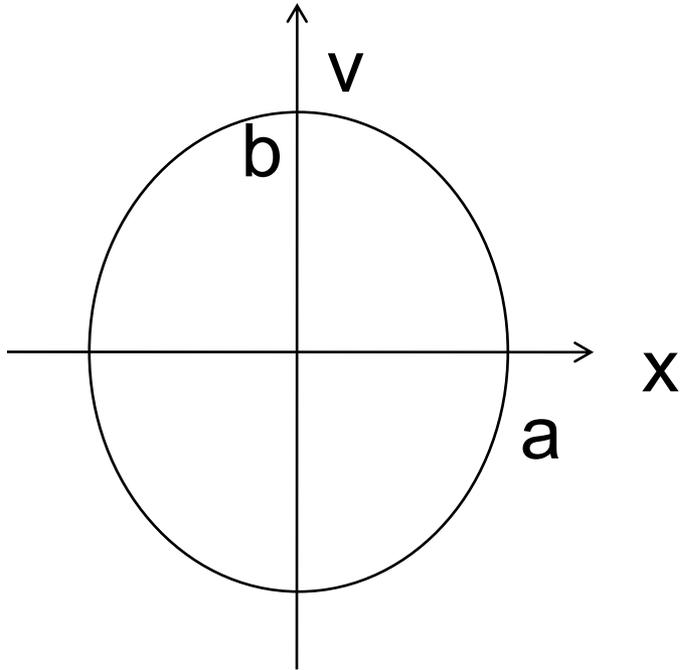


- C) Ambos são possíveis
- D) Ambos são impossíveis

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a = \sqrt{2E_0/k} = \text{max displacement}$$

$$b = \sqrt{2E_0/m} = \text{max speed}$$



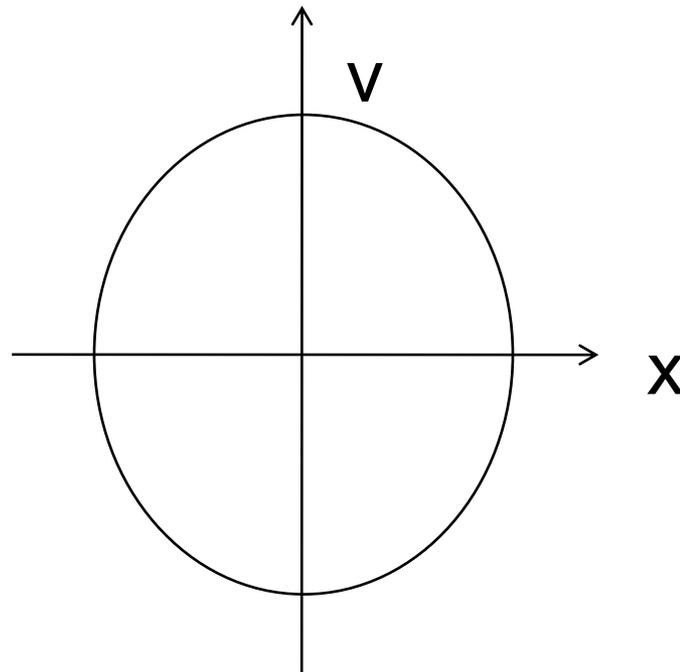
$$b/a = \sqrt{k/m} = \omega$$

1) Como muda o diagrama no espaço de fase se a elongação inicial for maior?

2) Como muda o diagrama no espaço de fase se a fase “ δ ” em $x(t)=A\cos(\omega t-\delta)$ muda?

Dê uma interpretação física para os seguintes fatos relativos à trajetória de um oscilador harmônico simples no espaço de fase:

- a trajetória tem tangente vertical no ponto em que cruza o eixo (x).
- a trajetória tem tangente horizontal no ponto em que cruza o eixo (v).

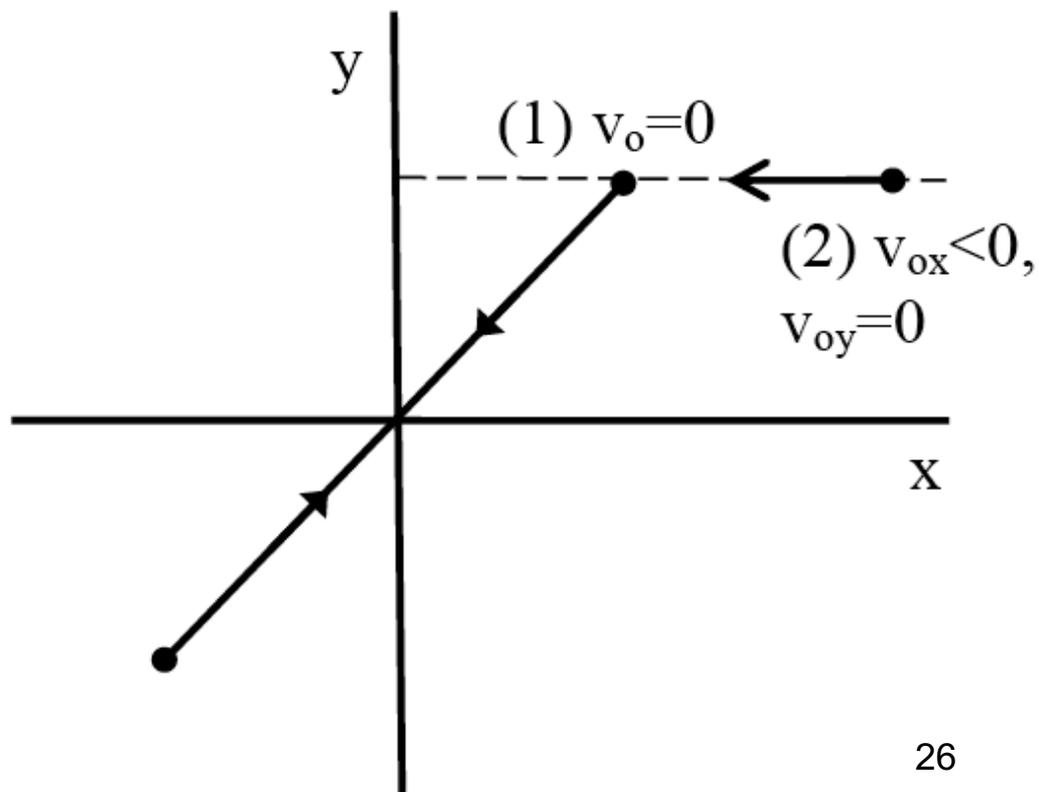


Movimento harmônico em 2D

Compare os movimentos de um oscilador harmônico 2D com dois conjuntos diferentes de condições iniciais. No caso (1) a partícula é abandonada a partir do repouso e oscila de acordo com o diagrama mostrado. No caso (2) a partícula inicia com maior elongação x e com uma componente x da velocidade negativa.

Como se comparam as amplitudes dos movimentos em x e y ?

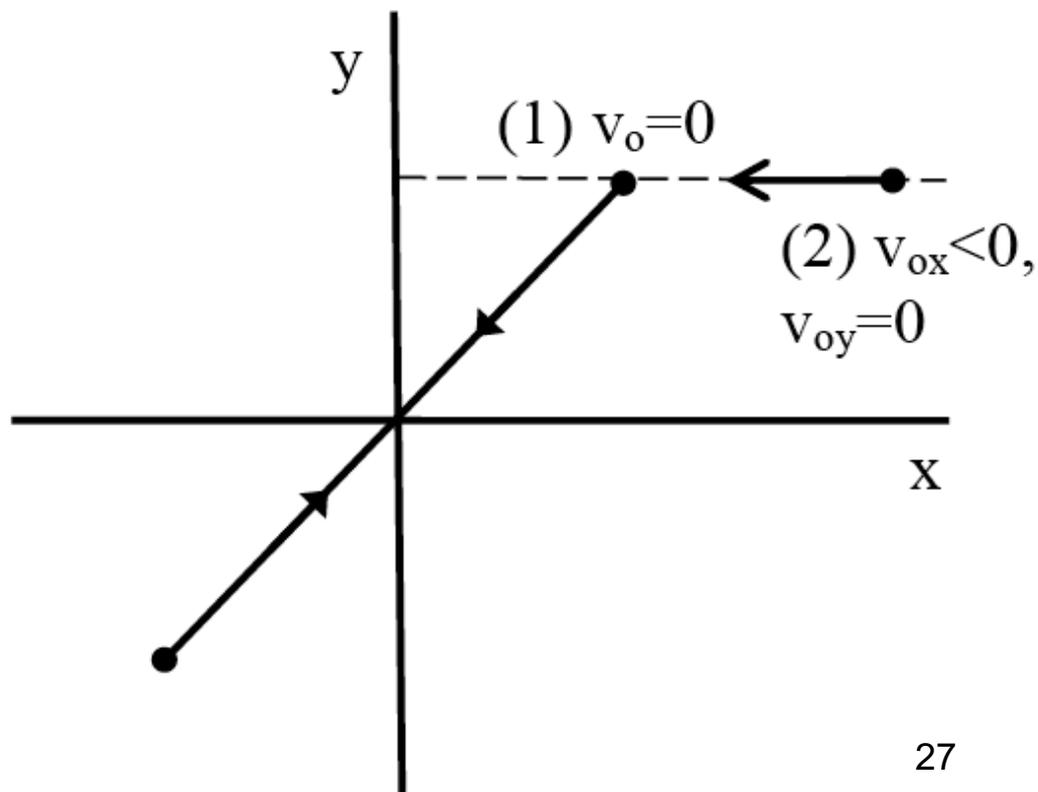
- A) $A_{x1} > A_{x2}$, $A_{y1} > A_{y2}$
- B) $A_{x1} < A_{x2}$, $A_{y1} = A_{y2}$
- C) $A_{x1} = A_{x2}$, $A_{y1} > A_{y2}$
- D) $A_{x1} < A_{x2}$, $A_{y1} < A_{y2}$
- E) $A_{x1} = A_{x2}$, $A_{y1} = A_{y2}$



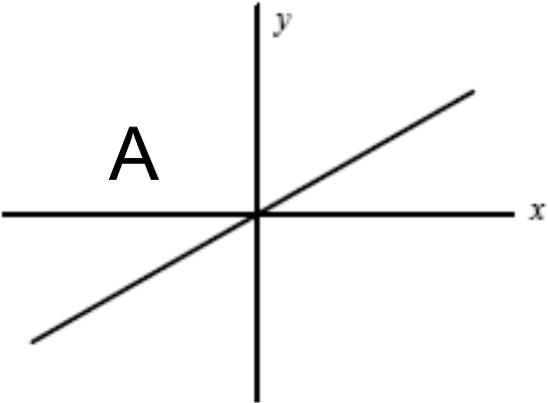
Compare os movimentos de um oscilador harmônico 2D com dois conjuntos diferentes de condições iniciais. No caso (1) a partícula é abandonada a partir do repouso e oscila de acordo com o diagrama mostrado. No caso (2) a partícula inicia com maior elongação x e com uma componente x da velocidade negativa.

Como se comparam as frequências dos movimentos em x e y ?

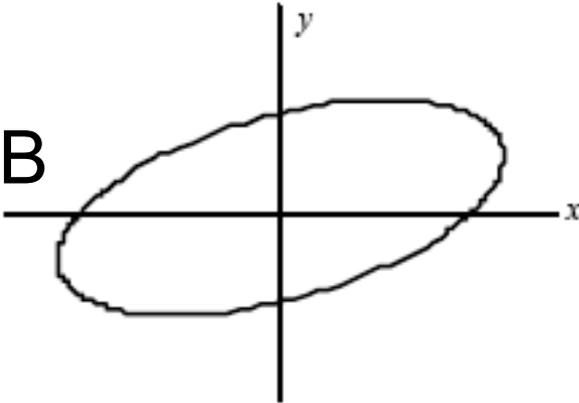
- A) $\omega_{x1} > \omega_{x2}$, $\omega_{y1} > \omega_{y2}$
- B) $\omega_{x1} < \omega_{x2}$, $\omega_{y1} = \omega_{y2}$
- C) $\omega_{x1} = \omega_{x2}$, $\omega_{y1} > \omega_{y2}$
- D) $\omega_{x1} < \omega_{x2}$, $\omega_{y1} < \omega_{y2}$
- E) $\omega_{x1} = \omega_{x2}$, $\omega_{y1} = \omega_{y2}$



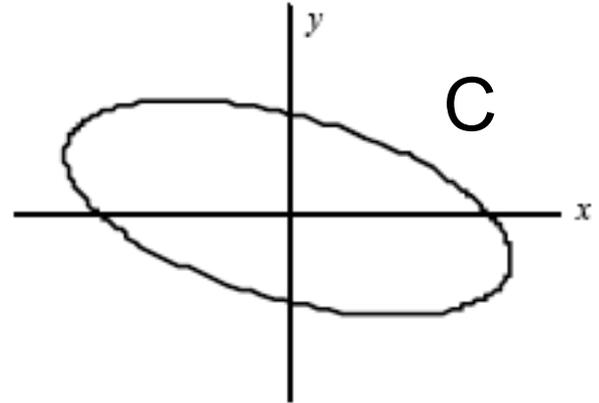
Qual das trajetórias abaixo melhor descrevem o caso 2 da questão anterior, no qual $v_{y0}=0$ e $v_{x0}<0$ no ponto inicial?



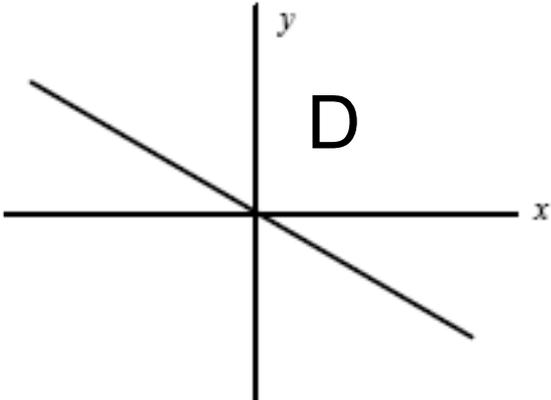
Trajectory #1



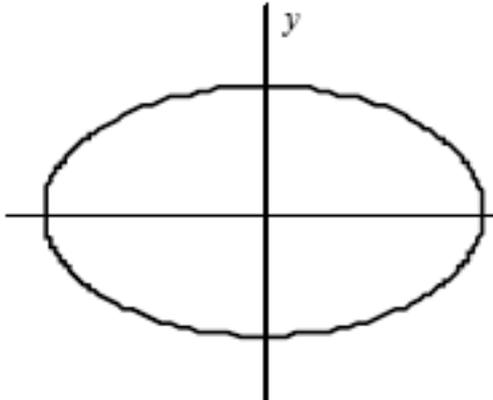
Trajectory #2



Trajectory #3

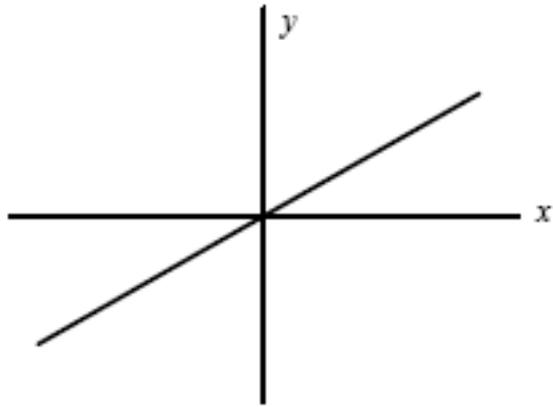


Trajectory #4

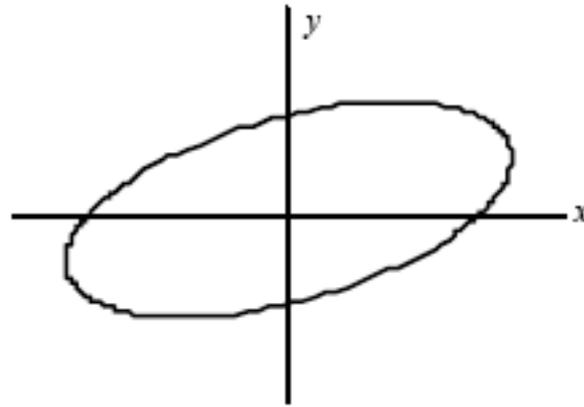


Trajectory #5

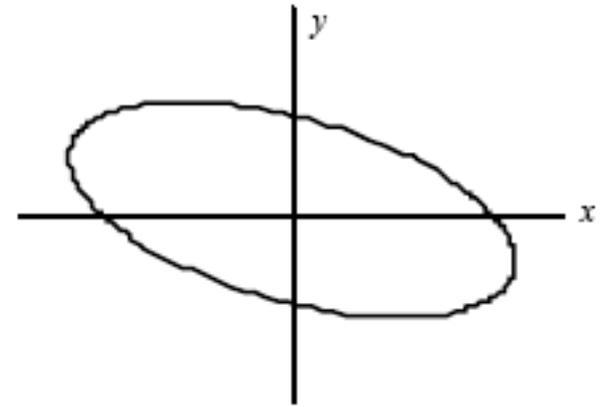
São mostradas abaixo várias trajetórias de um oscilador 2D. Em qual (quais) delas $\delta=0$?



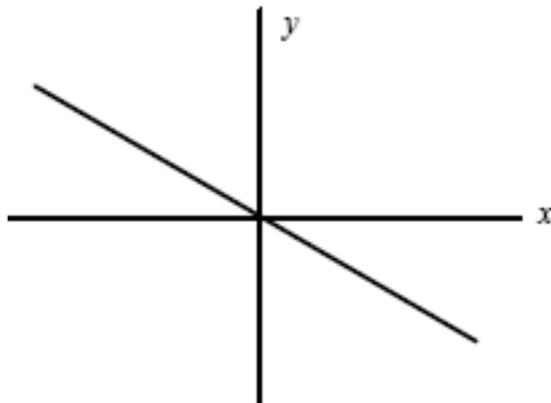
Trajectory #1



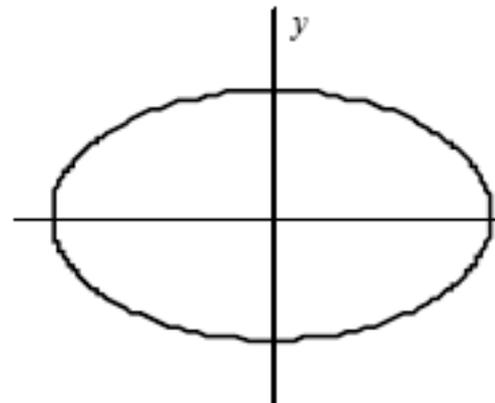
Trajectory #2



Trajectory #3



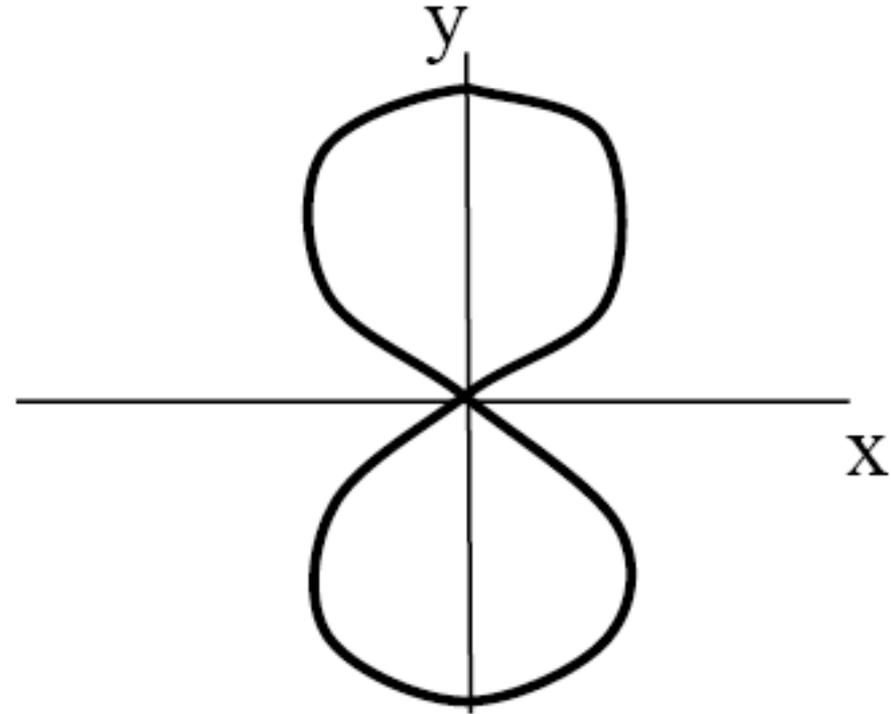
Trajectory #4



Trajectory #5

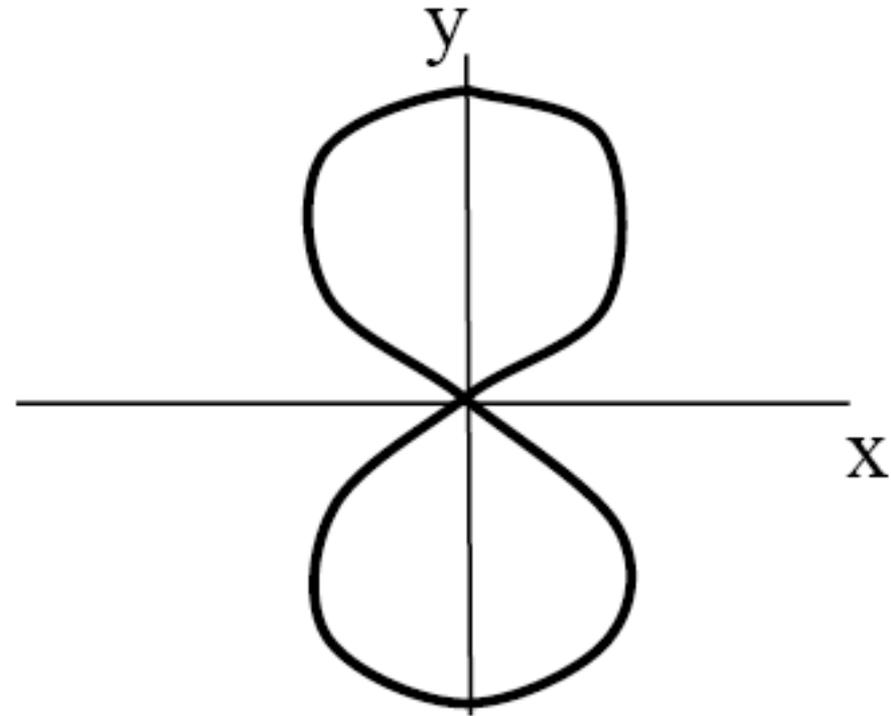
A figura mostra a trajetória de um oscilador 2D no plano xy.
Como se comparam as frequências dos movimentos em x e y?

- A) $\omega_x = 4\omega_y$
- B) $\omega_x = 2\omega_y$
- C) $\omega_x = \omega_y$
- D) $\omega_x = 0.5 \omega_y$
- E) $\omega_x = 0.25 \omega_y$



A figura mostra a trajetória de um oscilador 2D no plano xy.
Como se comparam as amplitudes dos movimentos em x e y?

- A) $A_x > A_y$
- B) $A_x \approx A_y$
- C) $A_x < A_y$



Considere uma bola muito elástica que quica num piso super elástico. A bola é abandonada de uma altura inicial h , quica sem dissipação e executa um número infinito de quiques indo e voltando até a altura h .

O movimento desta bola na direção vertical é um MHS?

- A) sim
- B) não
- C) ???

Oscilações amortecidas

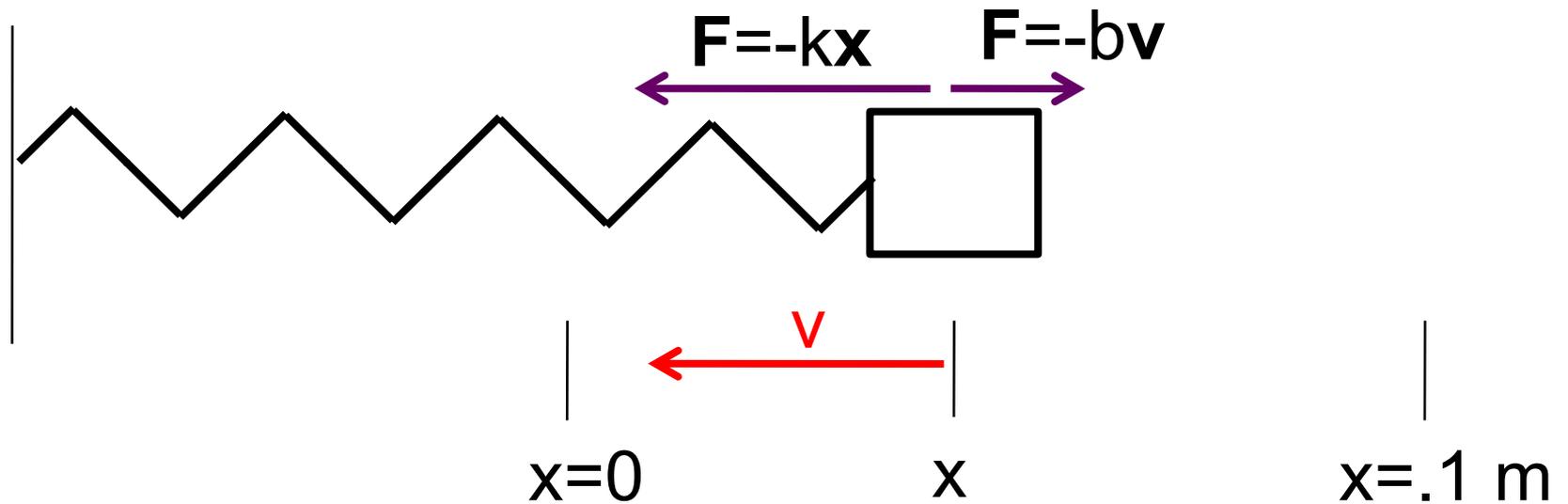
Um oscilador é abandonado do repouso em $x=+.1$ m, e executa um MHS ideal.

Se adicionarmos um pequeno amortecimento, como $|F_{res}|$ difere da situação ideal quando a massa estiver indo de $x=+.1$ para a origem? Ela é ...

- A) Ligeiramente *maior* que no caso ideal.
- B) Ligeiramente *menor* que no caso ideal
- C) *A mesma* que no caso ideal
- D) Ela é maior num trecho e menor em outro
- E) Depende da intensidade do amortecimento.

Sugestão: **Desenhe um diagrama de corpo livre!**

A massa no caminho entre $+0.1$ m e a origem...



A EDO para um MHS amortecido é:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\beta \frac{dy}{dt} + \alpha y = 0$$

Quais são os sinais das constantes α e β ?

- A) $\alpha, \beta > 0$
- B) $\alpha, \beta < 0$
- C) $\alpha < 0, \beta > 0$
- D) $\alpha > 0, \beta < 0$
- E) Depende!

Uma massa presa a uma mola sofre um pequeno amortecimento. O que acontece com o período de sua oscilação? Ele é...

- A) Ligeiramente *maior* que sem o amortecimento.
- B) Ligeiramente *menor* que sem o amortecimento.
- C) O *mesmo* que sem o amortecimento.

Quais são as raízes da equação auxiliar
 $D^2 + D - 2 = 0$?

- A) 1 e 2
- B) 1 e -2
- C) -1 e 2
- D) -1 e -2
- E) Nenhuma destas

Quais são as raízes da equação auxiliar de $y''(t) + y(t) = 0$?

- A) 1 e -1
- B) 1 e 0
- C) apenas 1
- D) apenas i
- E) i e -i

Quais são as raízes da equação auxiliar de $y''(t) + \omega^2 y(t) = 0$?

- A) ω e $-\omega$
- B) ω e 0
- C) apenas ω
- D) apenas $i\omega$
- E) $i\omega$ e $-i\omega$

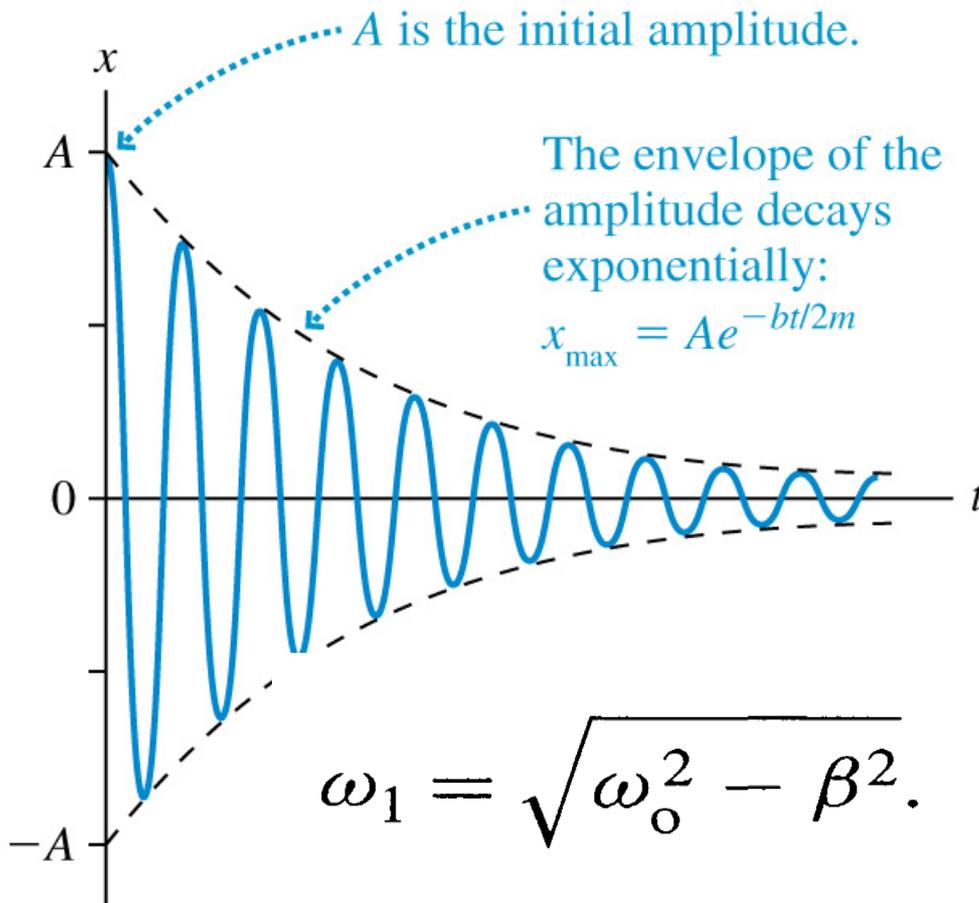
As funções $e^{i\omega t}$ e $\cos(\omega t)$ são linearmente independentes?

- A) sim
- B) não
- C) depende do valor de omega
- D) ???

Underdamped Oscillations

An *underdamped oscillation* with $\beta < \omega_0$:

$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta).$$



$$\beta < \omega_0$$

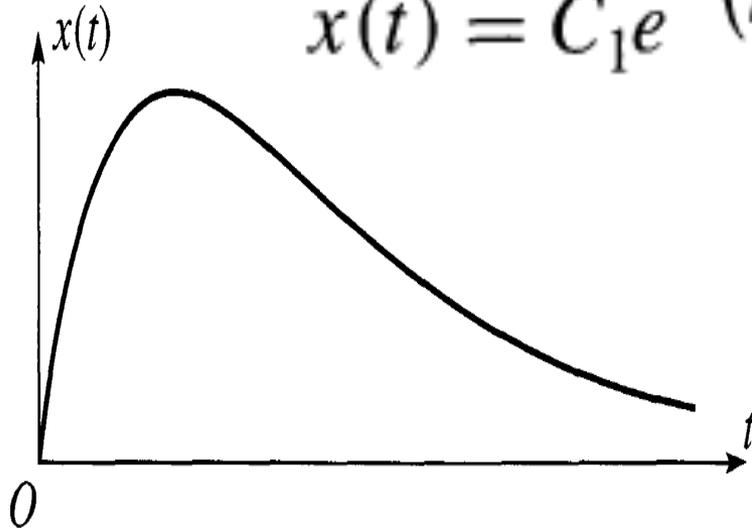
$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Note that damping *reduces* the oscillation frequency.

Overdamped Oscillations

An *overdamped oscillation* with $\beta > \omega_0$:

$$x(t) = C_1 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}.$$



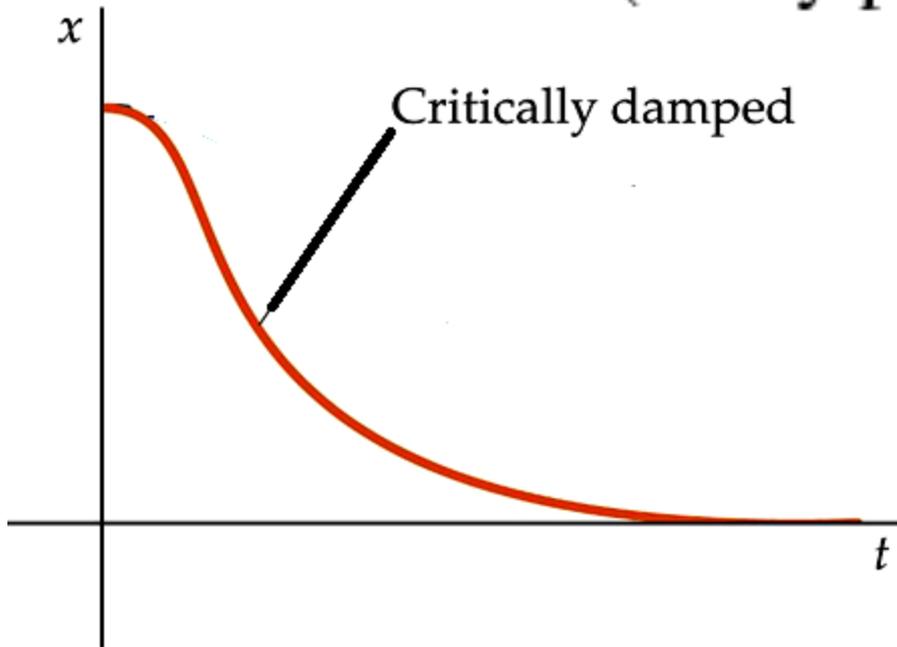
$$(\text{decay parameter}) = \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Critically damped Oscillations

A critically damped *oscillation* with $\beta = \omega_0$:

$$x(t) = C_1 e^{-\beta t} + C_2 t e^{-\beta t}.$$

(decay parameter) = $\beta = \omega_0$



Uma massa presa a uma mola sofre um pequeno amortecimento. Quando ela passa por $x=0$, qual das afirmativas está correta?

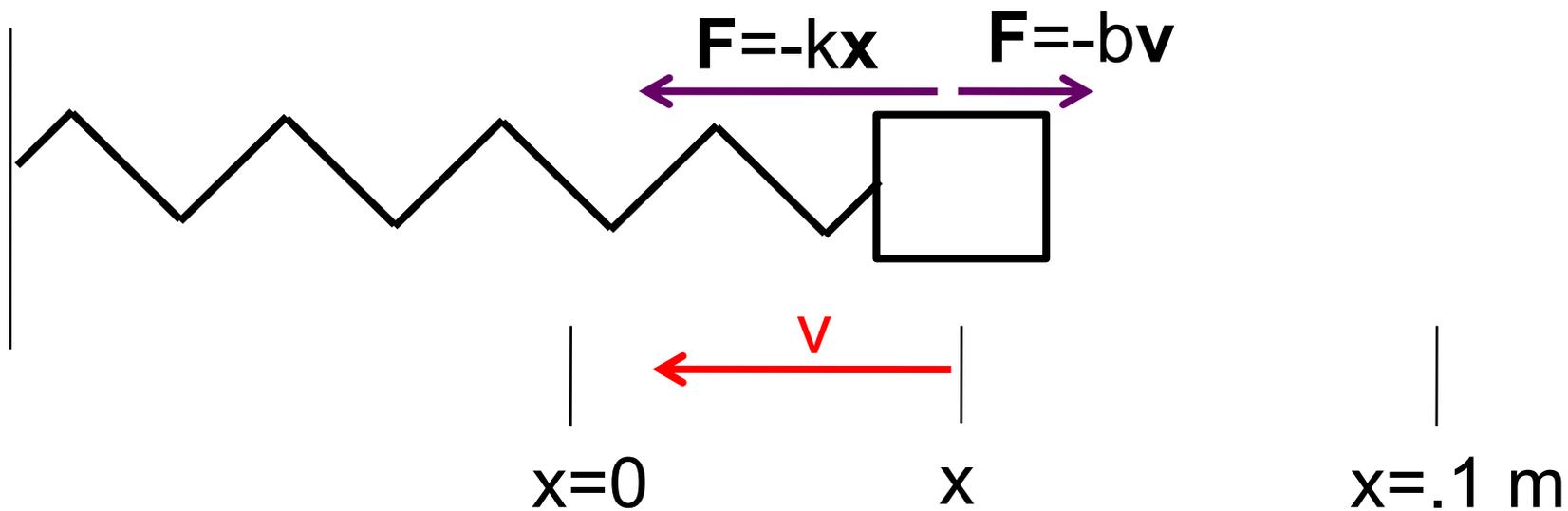
- A) Sua rapidez está aumentando
- B) Sua rapidez está diminuindo
- C) Sua rapidez é máxima (e portanto não está nem aumentando nem diminuindo)
- D) A resposta depende do SENTIDO de seu movimento.

Uma massa presa a uma mola sofre um pequeno amortecimento. Ela é abandonada a partir do repouso. Onde v_{\max} ocorre primeiro?

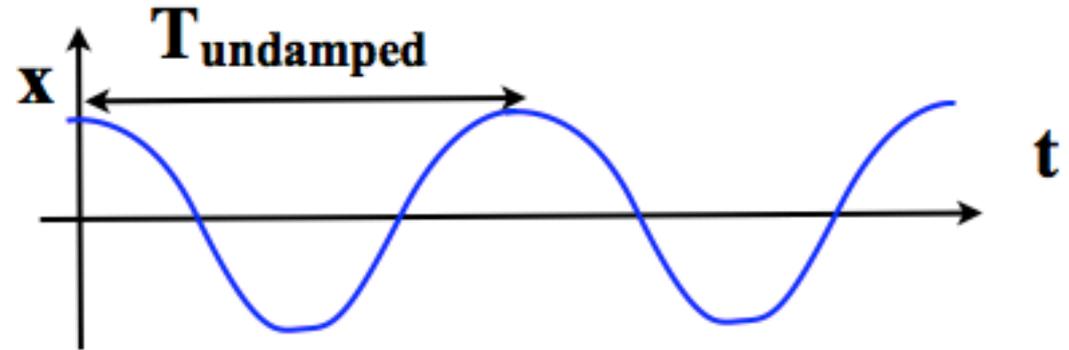
- A) ANTES de chegar em $x=0$
- B) DEPOIS de passar por $x=0$
- C) Precisamente em $x=0$
- D) ???

DICA: No instante em que ela passa por $x=0$, sua rapidez está aumentando, diminuindo, ou tem seu valor máximo?

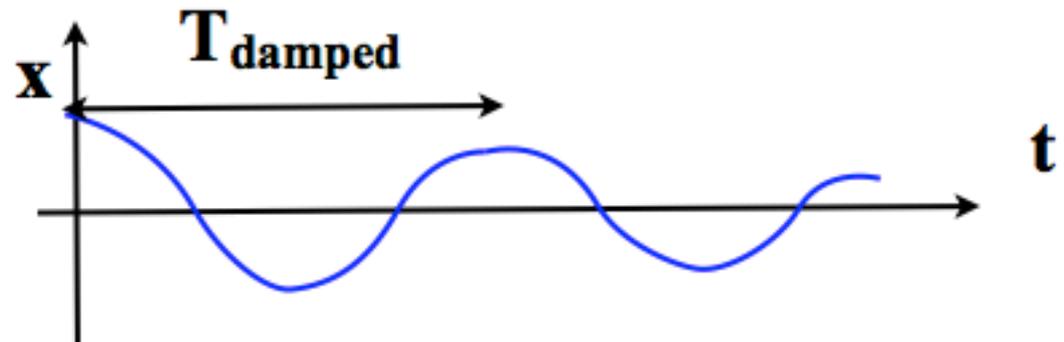
Pensar nisto ajuda?



Num oscilador amortecido, como o período entre dois máximos sucessivos se compara com o caso sem amortecimento?
(Suponha que k e m sejam os mesmos nos 2 casos)

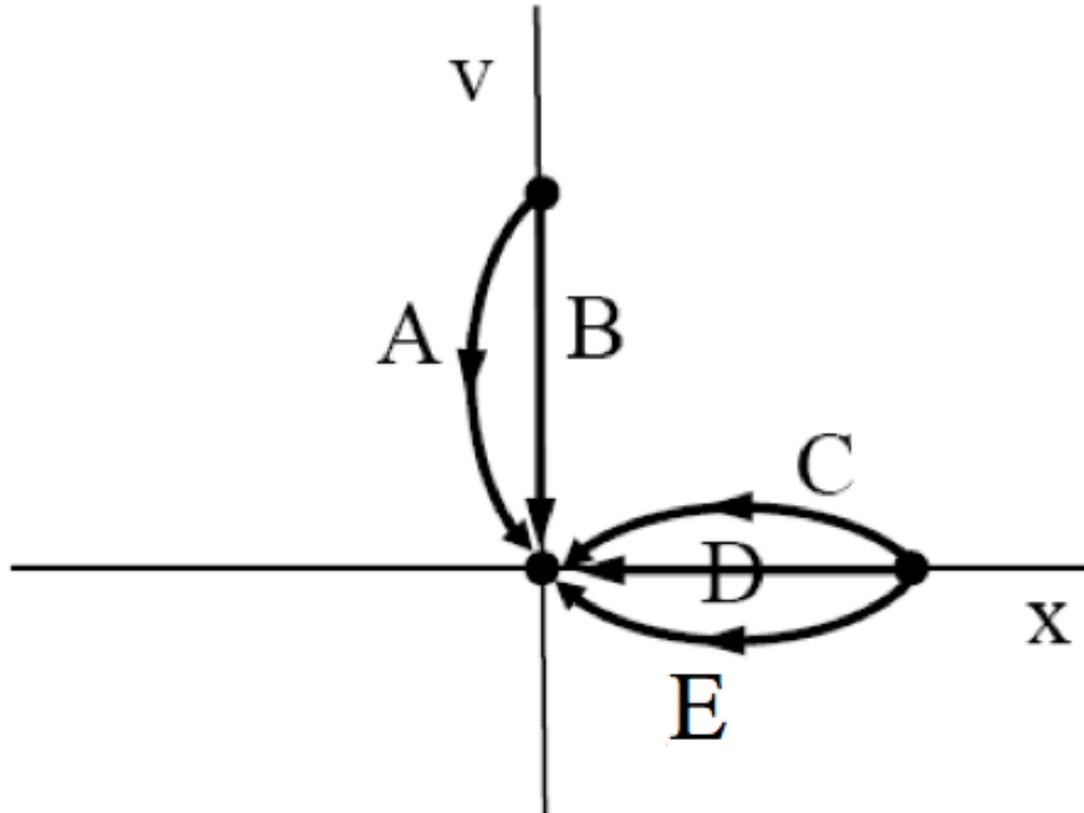


Not necessarily on the same horizontal scale!



- A) iguais
- B) amortecido é maior
- C) amortecido é menor

Qual trajetória no espaço de fase melhor descreve um oscilador harmônico super amortecido abandonado do repouso?



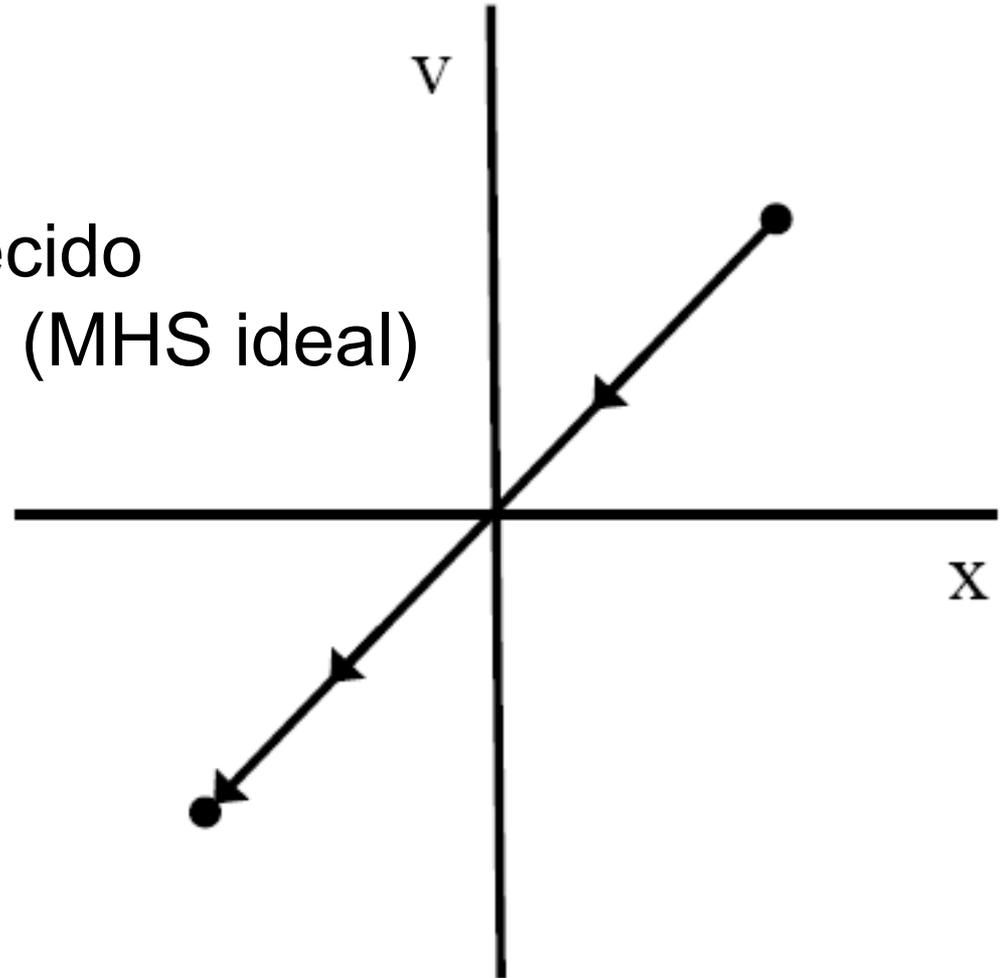
Desafio: Como muda sua resposta se o oscilador for “criticamente amortecido”?

Que tipo de comportamento no amortecimento devem os amortecedores do seu carro ter para a viagem ser mais agradável?

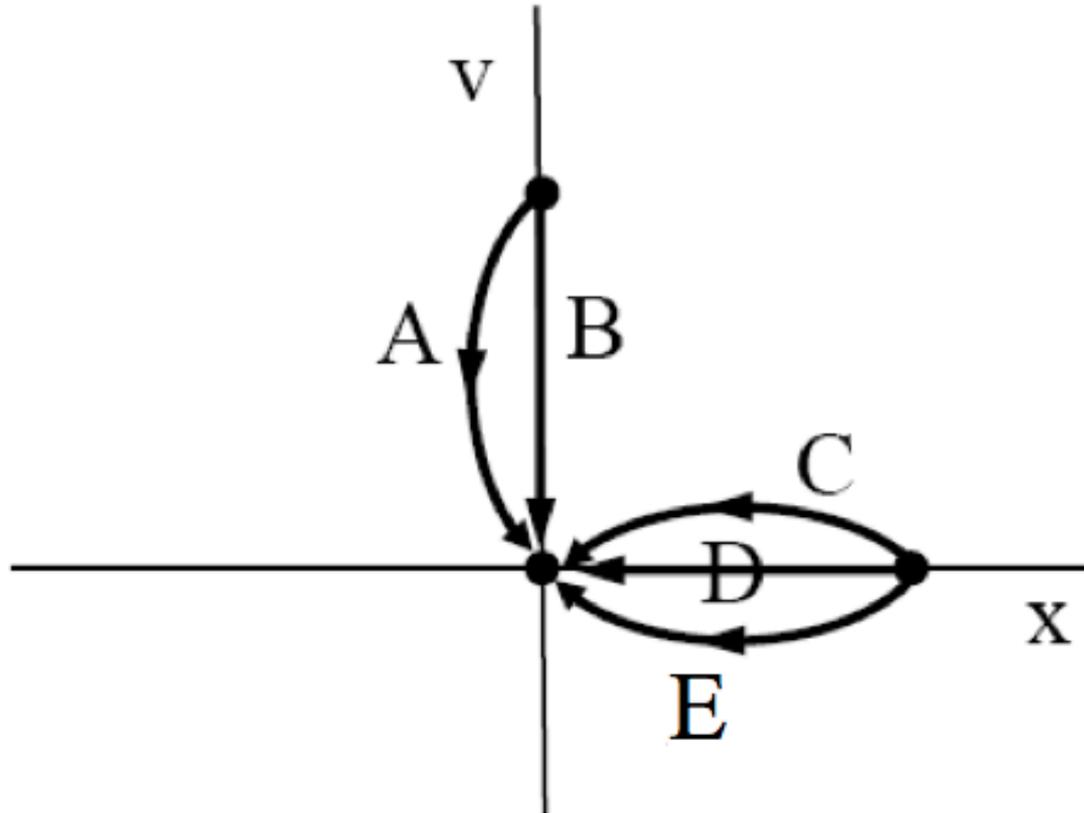
- A) Nenhum amortecimento
- B) Sub-amortecido
- C) Amortecimento crítico
- D) Super-amortecido

Que tipo de movimento oscilatório é descrito por este diagrama no espaço de fase?

- A) Super-amortecido
- B) Sub-amortecido
- C) Criticamente amortecido
- D) Sem amortecimento (MHS ideal)
- E) ??? (é impossível?)



Qual trajetória no espaço de fase melhor descreve um oscilador harmônico super amortecido abandonado do repouso?



Challenge question: How does your answer change if the oscillator is “critically damped”?

Conceitos importantes

Frequencia angular $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$

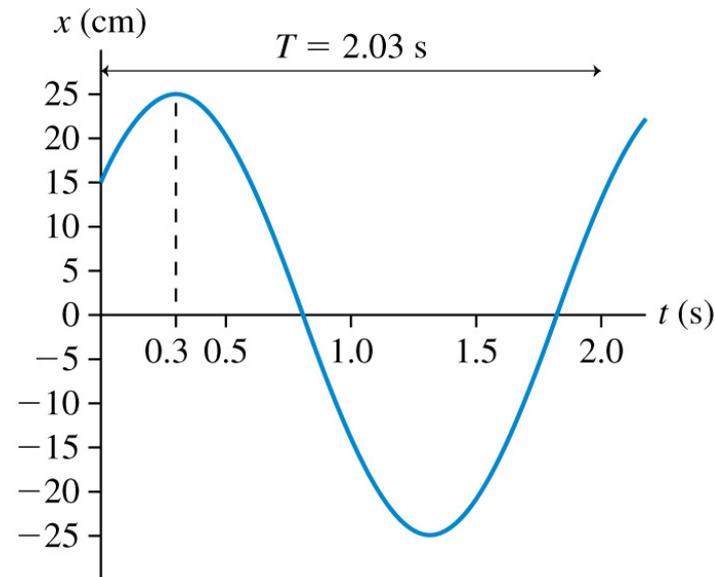
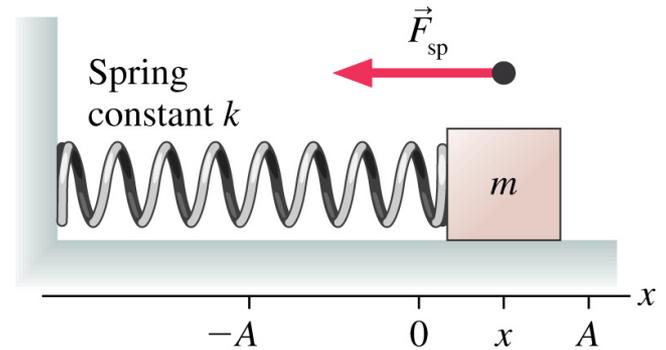
Frequencia: $f = \frac{1}{T}$

Posição: $x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$

Velocidade: $v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \delta)$

Aceleração: $a(t) = -\omega^2 x(t)$

Energia: $E = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$



**Ausência de atrito
implica em
conservação da
energia mecânica**

Oscilações Amortecidas

$$F_{drag} = -bv$$

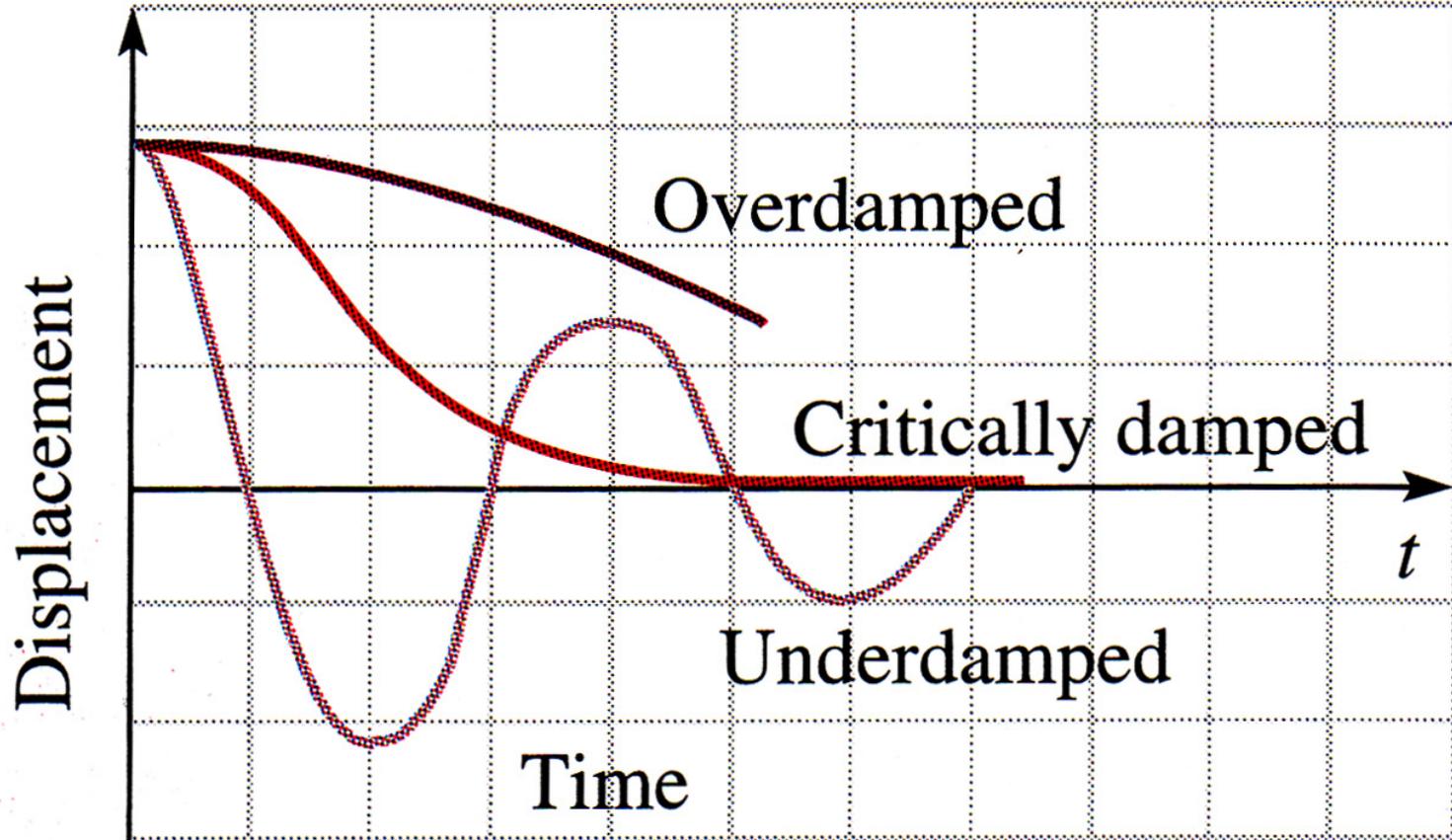
$$2\beta = b/m$$

$$F = m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

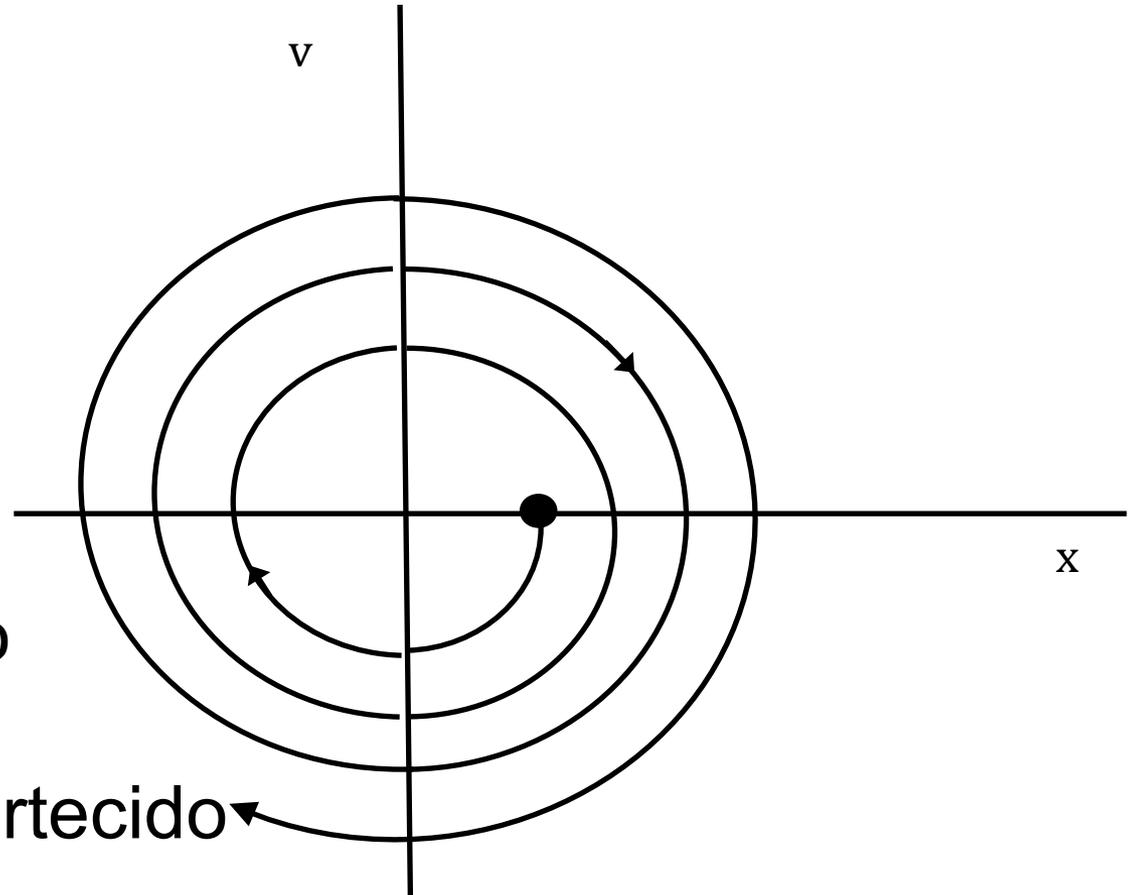
$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$



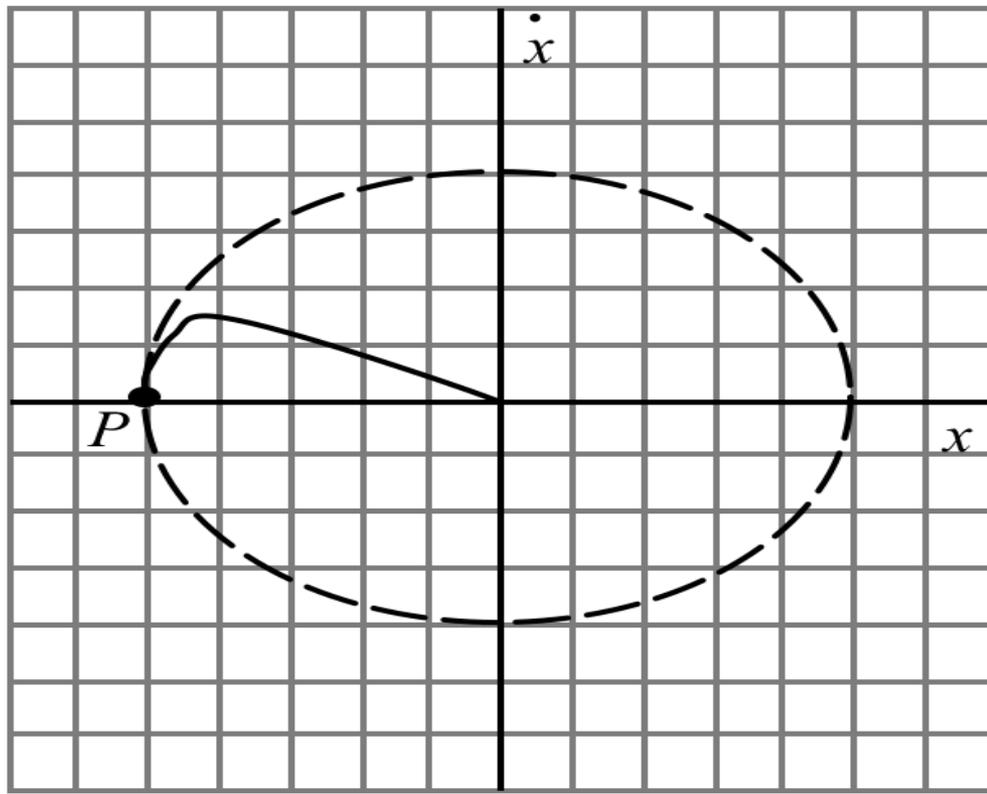
Oscilações Amortecidas



Que tipo de movimento é descrito por esta trajetória no espaço de fase?



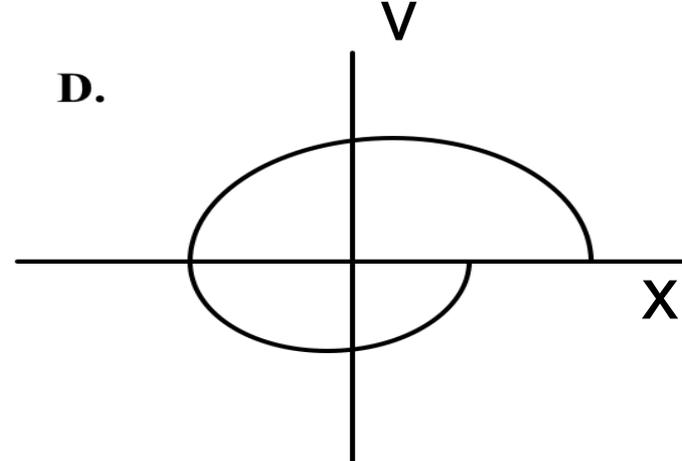
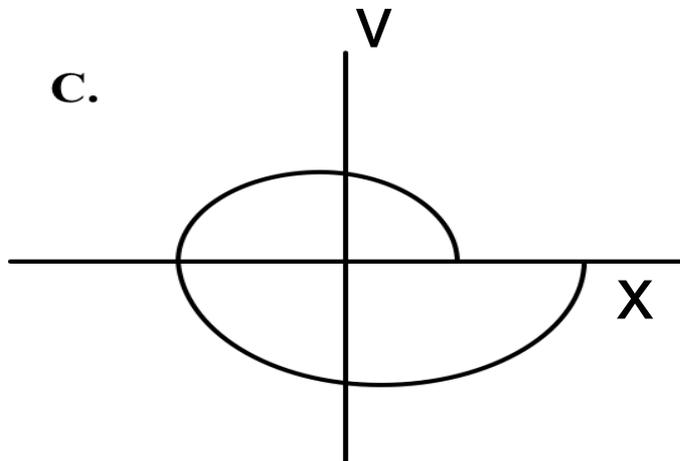
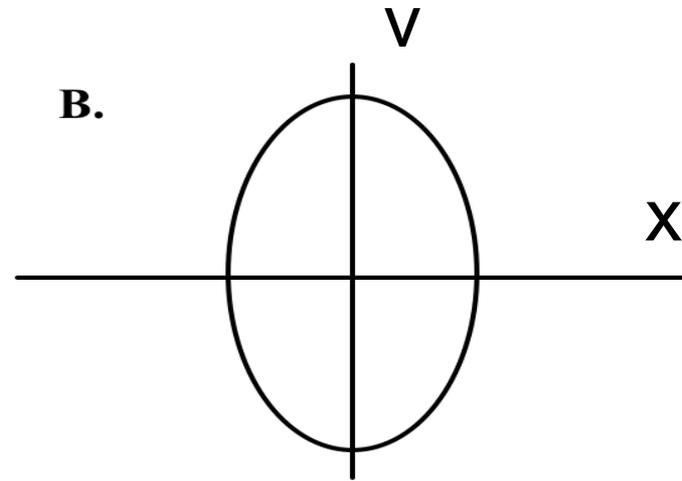
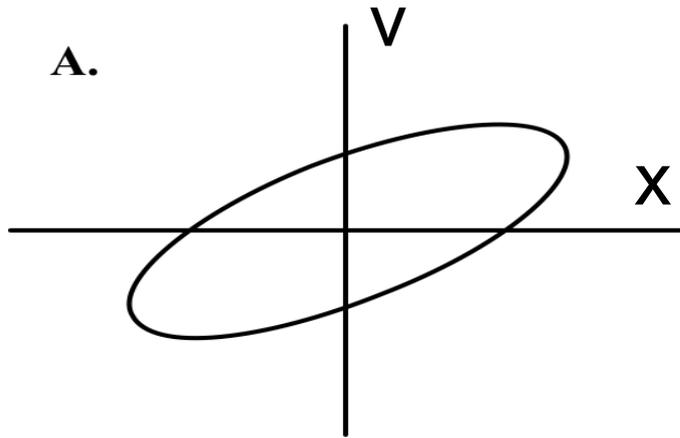
- A) Super-amortecido
- B) Sub-amortecido
- C) Criticamente amortecido
- D) Impossível dizer
- E) Este movimento é impossível



A trajetória no espaço de fase composta pela linha sólida que começa em P e acaba na origem representa que sistema?

- A) Sem amortecimento B) Sub-amortecido
 C) criticamente amortecido
 D) Super-amortecido E) Falta info!!

Qual destes diagramas do espaço de fase pode representar um período completo de um oscilador 1D sub-amortecido?



E) Nenhum, ou MAIS que 1!!

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

Dada a equação diferencial de um circuito RLC, que quantidade é análoga ao termo de amortecimento num oscilador mecânico?

- A) R, resistência
- B) L, indutância
- C) C, capacitância
- D) Q, carga
- E) t, tempo

Desafio: A que correspondem as duas outras quantidades elétricas num sistema mecânico?

A densidade de um objeto esférico é $\rho(r)=c/r^2$ (até $r=R$, e 0 se $r>R$).

Isto significa que a massa total do objeto é $M =$

$$A) \quad \rho V = \left(\frac{c}{r^2} \right) \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) = \frac{4\pi c}{3} r$$

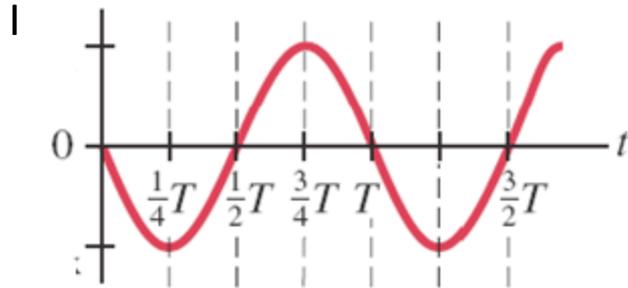
$$B) \quad \rho V = \left(\frac{c}{R^2} \right) \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) = \frac{4\pi c}{3} R$$

$$C) \quad \rho V = \left(\frac{c}{r^2} \right) \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) = \frac{4\pi c R^3}{3r^2}$$

D) None of these is correct!

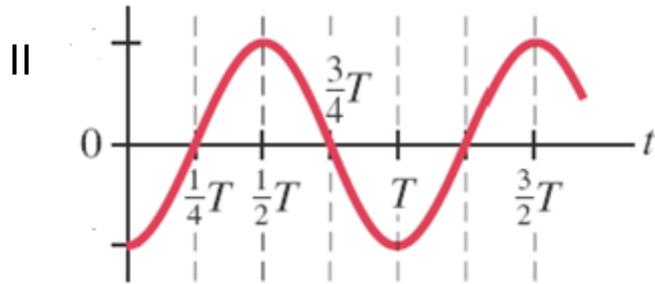
Revisão rápida depois do feriado

Se uma massa-mola é esticada e abandonada a partir do repouso, os gráficos abaixo correspondem a:



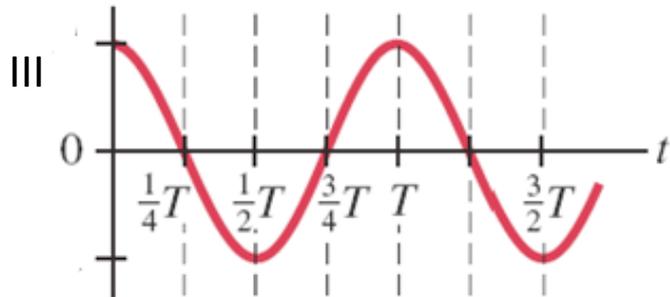
A) I: velocidade, II: posição, III: aceleração

B) I: posição, II: velocidade, III: aceleração



C) I: aceleração, II: velocidade, III: posição

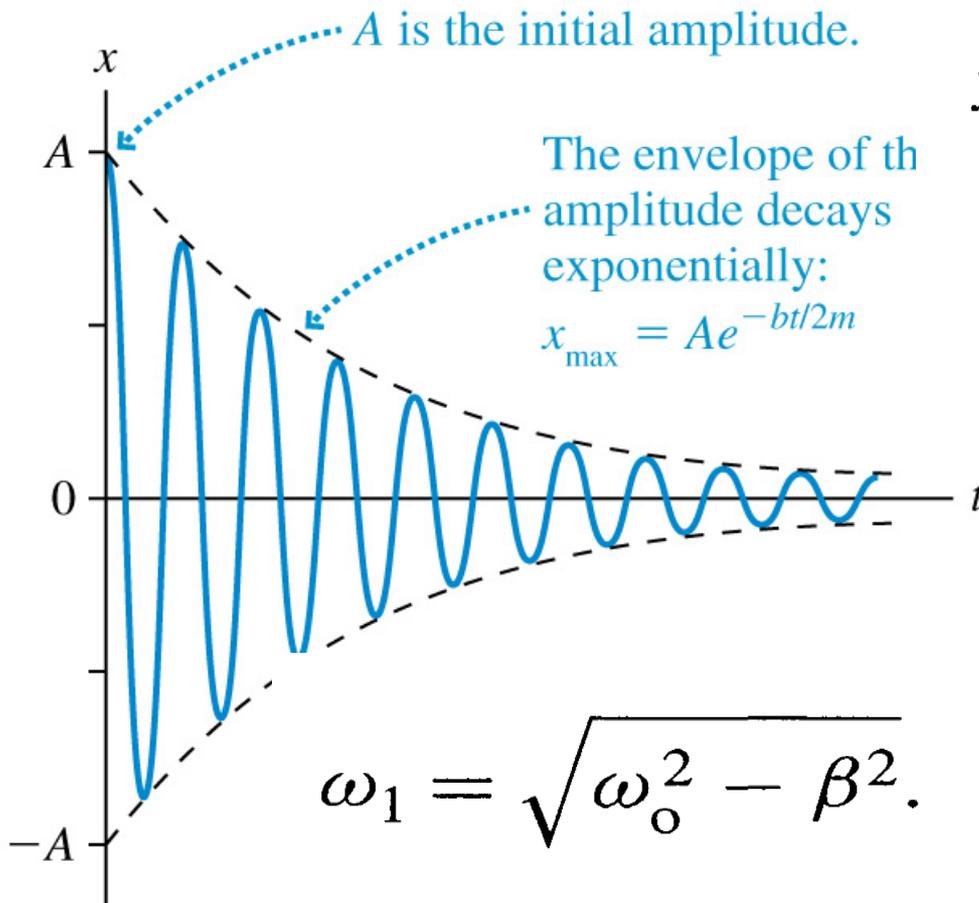
D) I: velocidade, II: aceleração, III: posição



E) Falta informação!

Underdamped Oscillations

An *underdamped oscillation* with $\beta < \omega_0$:



$$x(t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta).$$

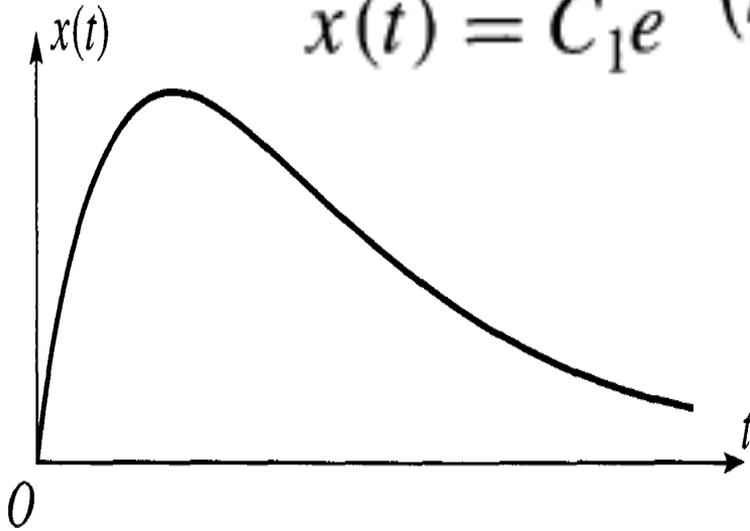
$$\beta < \omega_0$$

Note that damping *reduces* the oscillation frequency.

Overdamped Oscillations

An *overdamped oscillation* with $\beta > \omega_0$:

$$x(t) = C_1 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}.$$



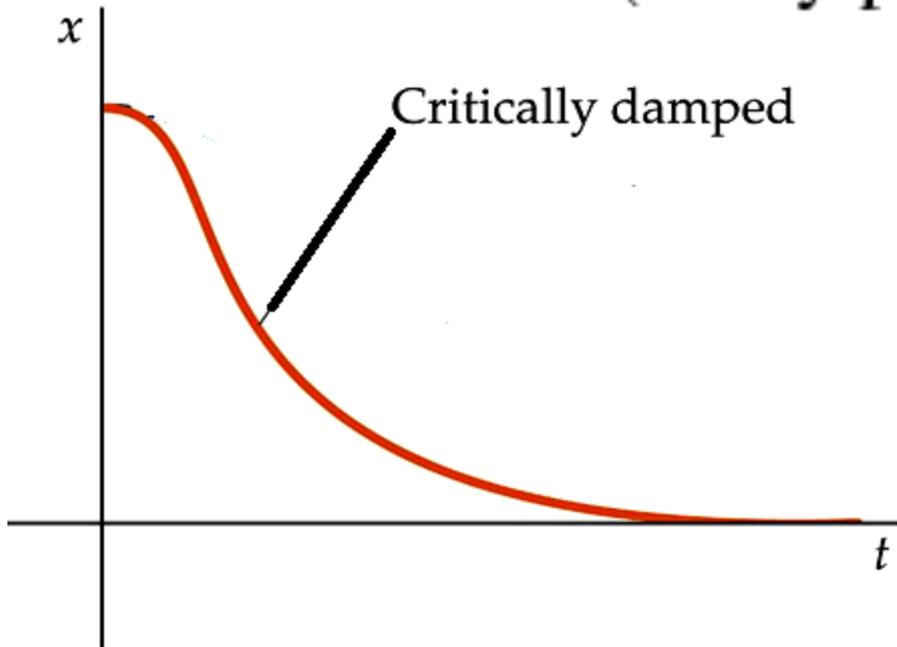
$$(\text{decay parameter}) = \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Critically damped Oscillations

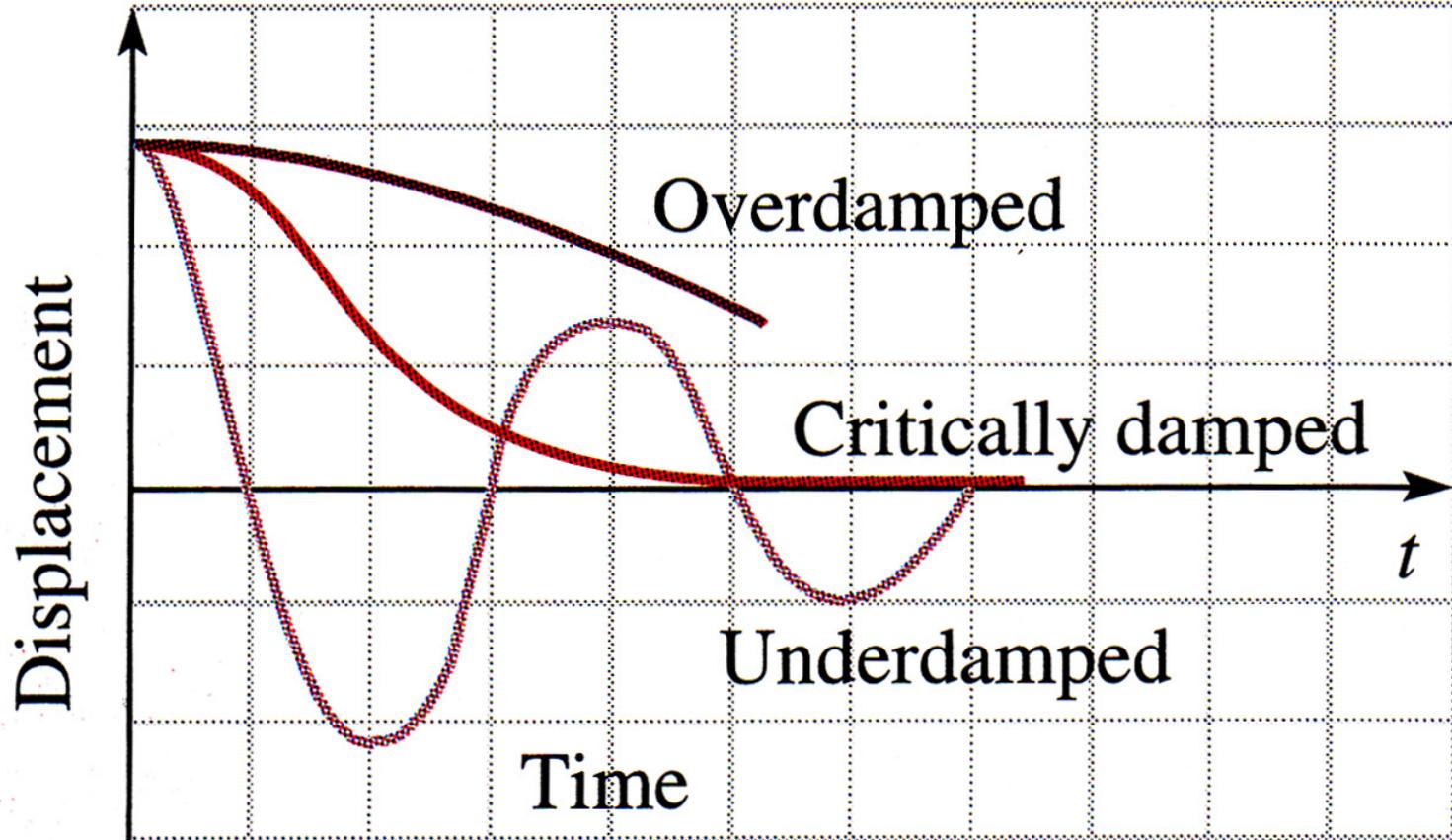
A critically damped *oscillation* with $\beta = \omega_0$:

$$x(t) = C_1 e^{-\beta t} + C_2 t e^{-\beta t}.$$

(decay parameter) = $\beta = \omega_0$



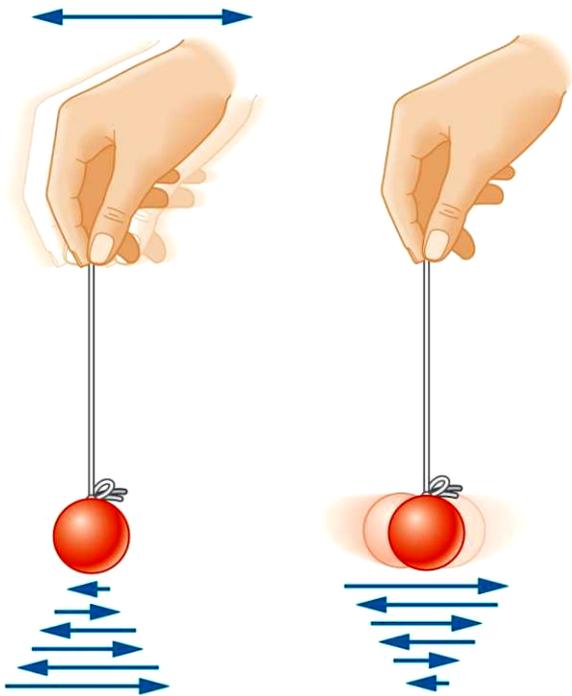
Damped oscillations



Oscilações forçadas

Esta aula

Oscilações forçadas & Ressonância



Osciladores forçados e Ressonância:

Emissão & absorção de luz

Lasers

Sintonia de rádios e televisores

Telefones móveis

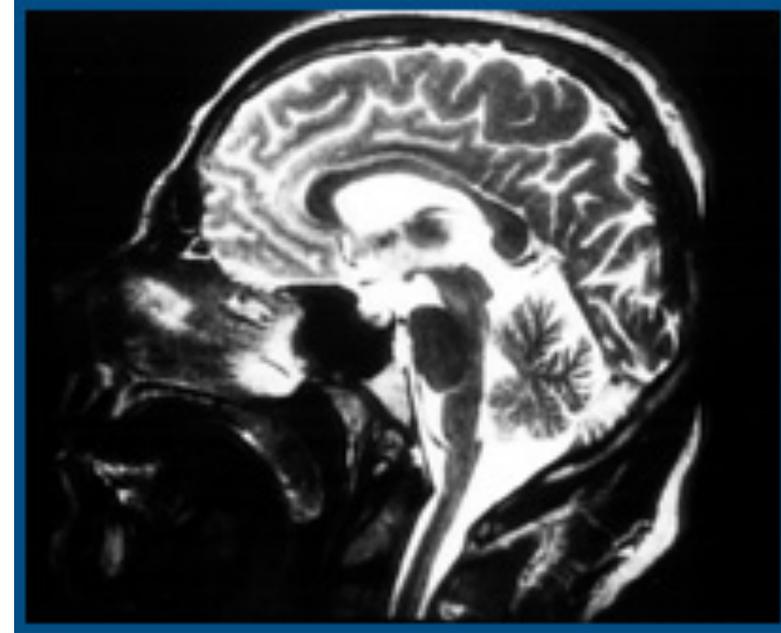
Comunicação por micro-ondas

Desenho de máquinas, prédios e pontes

Instrumentos musicais

Medicina

- ressonância magnética nuclear
- imagens por ressonância magnética
- raios-x
- audição



Nuclear magnetic Resonance Scan

Qual dessas é uma solução particular da equação
 $y''+4y'-12y=5$?

A) $y=e^{5t}$

B) $y=-5/12$

C) $y=-a \ 5/12$

D) $y= a e^{2t} +b e^{-6t} +5$

E) Nenhuma destas

A solução geral é portanto $y= a e^{2t} +b e^{-6t} - 5/12$

Qual forma deveríamos tentar para achar uma
solução particular da equação
 $y''+4y'+6y=3e^{2t}$?

Que tal $y = Ae^{2t}$?

Ou então $y = f_0 \cos(2t)$?

Considere a equação

$$x'' + 16x = 9 \sin(5t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

Sua solução é...

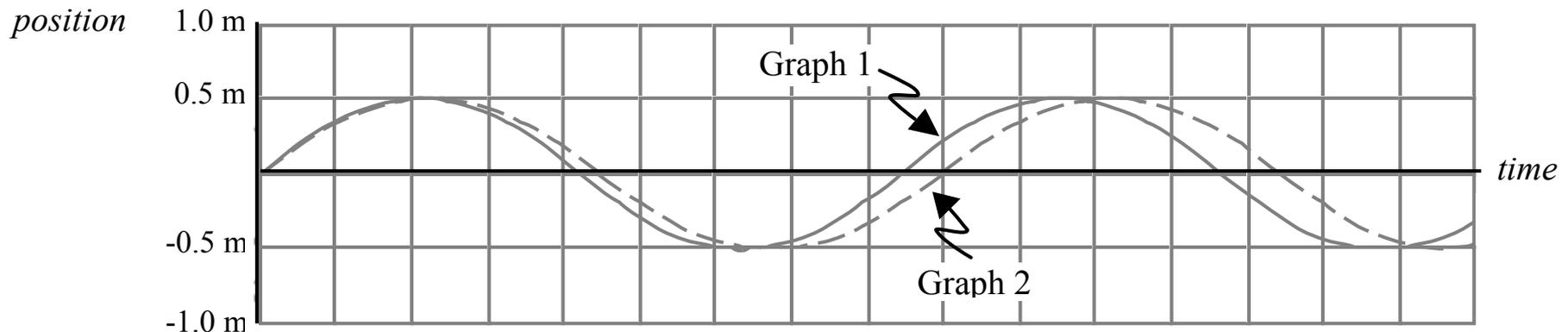
- A. $x(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t) - \sin(5t)$
- B. $x(t) = 5/4 \sin(4t) - \sin(5t)$
- C. $x(t) = \cos(4t) - \cos(5t)$
- D. Não sei achar

Quando variamos ω a frequência de ressonância é

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

Suponha um oscilador ideal, com amplitude 0.5 m. Um outro similar é fracamente amortecido, e forçado, de modo que em $t=0$ uma amplitude estacionária (**ressonante**) de 0.5 m foi alcançada.

Que gráfico representa cada oscilador?



Qual é a forma *mais geral* da solução da EDO $u''+4u=e^t$?

A) $u=C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} + C_3e^t$

B) $u=A\cos(2t-\delta) + C_3e^t$

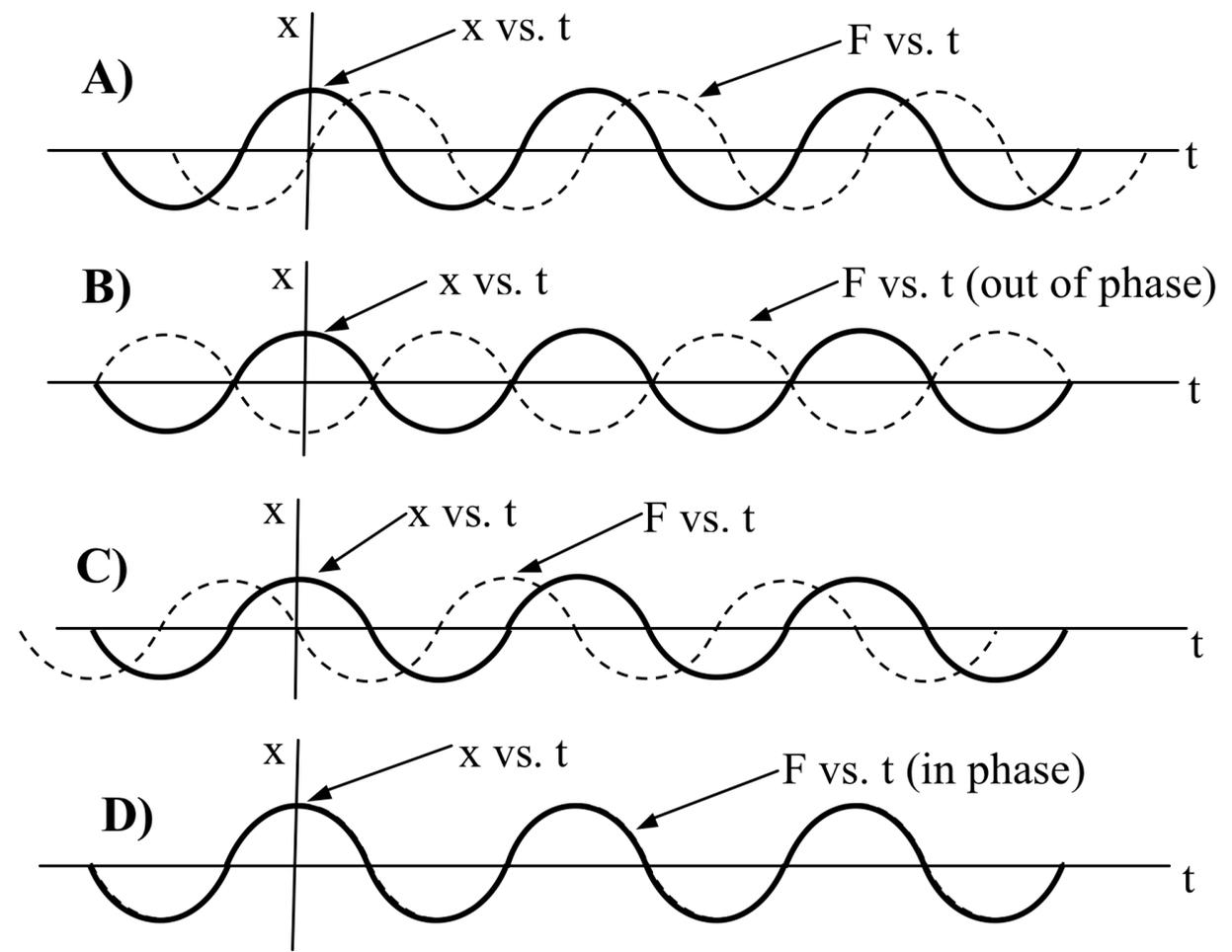
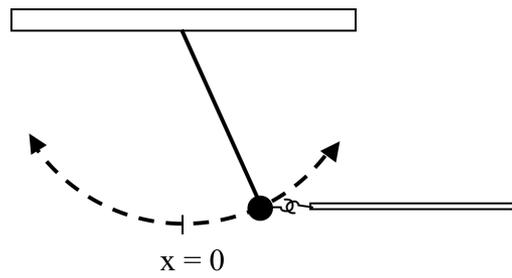
C) $u=C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} + (1/5)e^t$

D) $u=A\cos(2t-\delta) + (1/5)e^t$

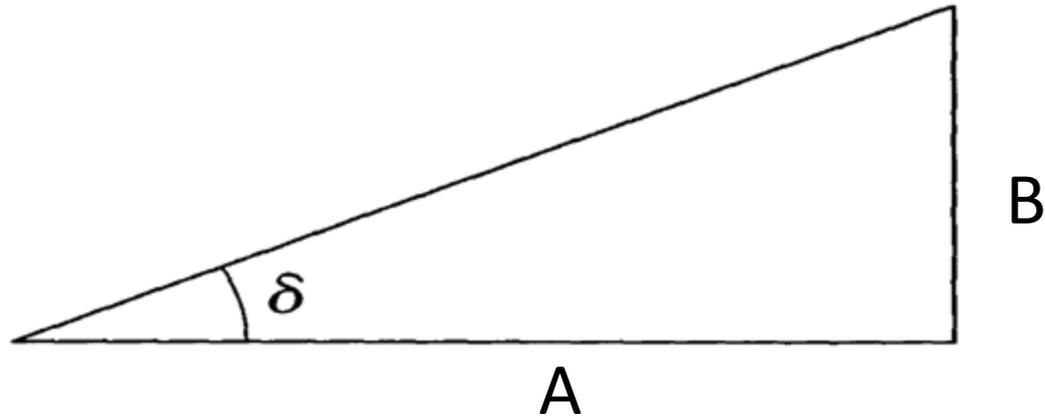
E) Nenhuma destas

Uma pessoa empurra e puxa um pêndulo com um bastão. A direção positiva do eixo x para a posição e a força sobre o pêndulo aponta para a direita.

Para gerar amplitude máxima do movimento do pêndulo, como a fase da força do bastão deve estar relacionada com a fase da posição do pêndulo?



O ângulo δ deste triângulo é



A. $\delta = \arctan\left(\frac{B}{A}\right)$

B. $\delta = \text{arc cot}\left(\frac{A}{B}\right)$

C. $\delta = \arctan\left(\frac{A}{B}\right)$

D. Mais de uma correta

D. Nenhuma correta

Considere a solução geral para um oscilador amortecido e forçado:

Qual termo é dominante quando t é “grande”?

$$x(t) = \underbrace{C_1 e^{-\beta t} e^{+\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t}}_{\text{termo A}} + \underbrace{C_2 e^{-\beta t} e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t}}_{\text{termo B}} + \underbrace{A \cos(\omega t - \delta)}_{\text{termo C}}$$

D) Depende dos valores das constantes

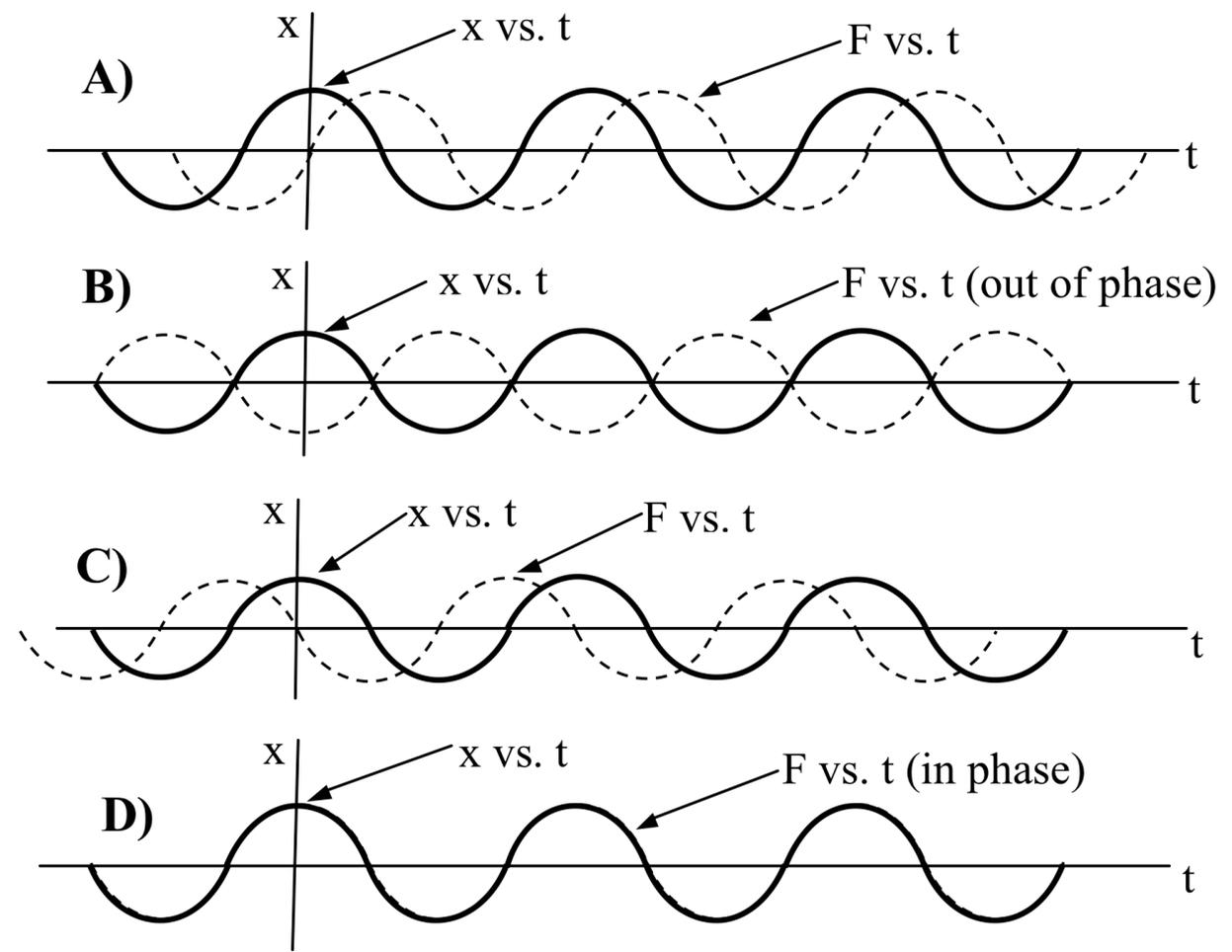
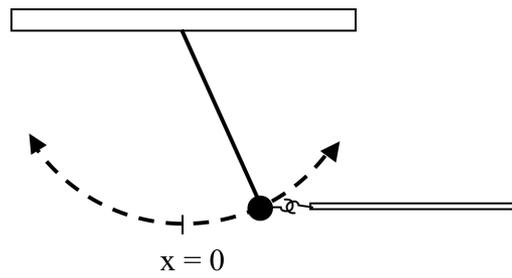
E) Mais de um destes!

Desafio: Que termo(s) importa(m) mais quando t é “pequeno”?

Qual termo “torna-se desprezível” primeiro?

Uma pessoa empurra e puxa um pêndulo com um bastão. A direção positiva do eixo x para a posição e a força sobre o pêndulo aponta para a direita.

Para gerar amplitude máxima do movimento do pêndulo, como a fase da força do bastão deve estar relacionada com a fase da posição do pêndulo?



Considere a amplitude

$$A^2 = \frac{f_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}$$

No limite em que ω vai a infinito, A...

- A. vai a zero
- B. se aproxima de uma constante não nula
- C. vai a infinito
- D. Impossível saber!

Considere a amplitude

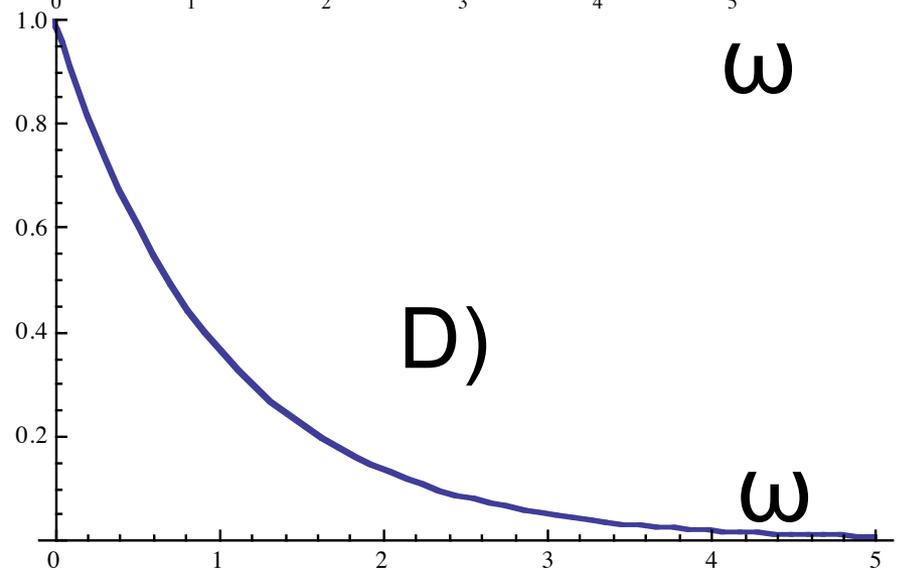
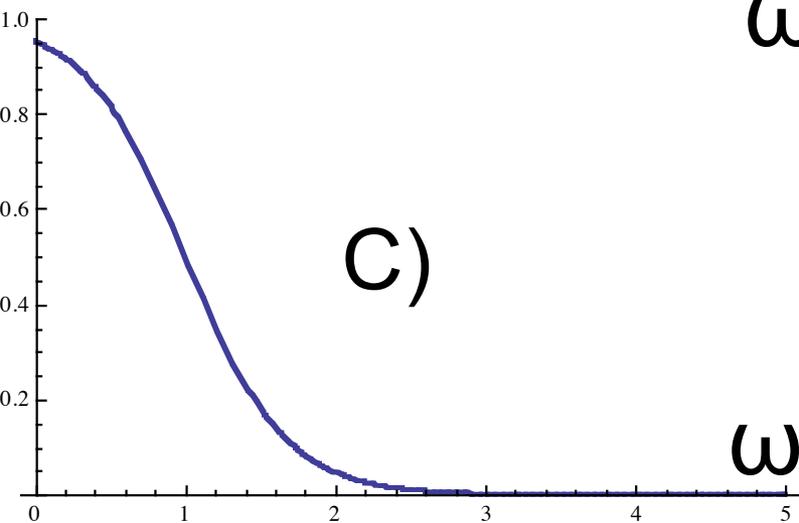
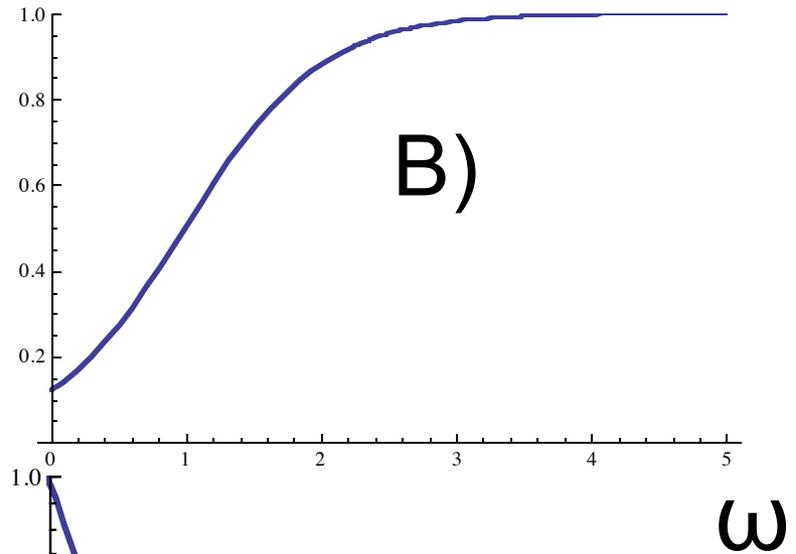
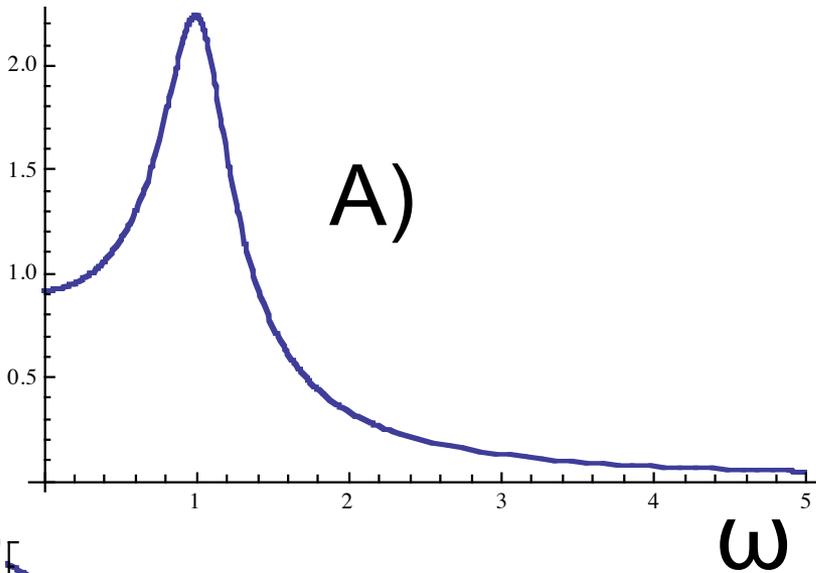
$$A^2 = \frac{f_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}$$

No limite de amortecimento nulo, A...

- A. vai a zero
- B. se aproxima de valor constante não nulo
- C. vai a infinito
- D. Impossível saber!

Qual o gráfico de

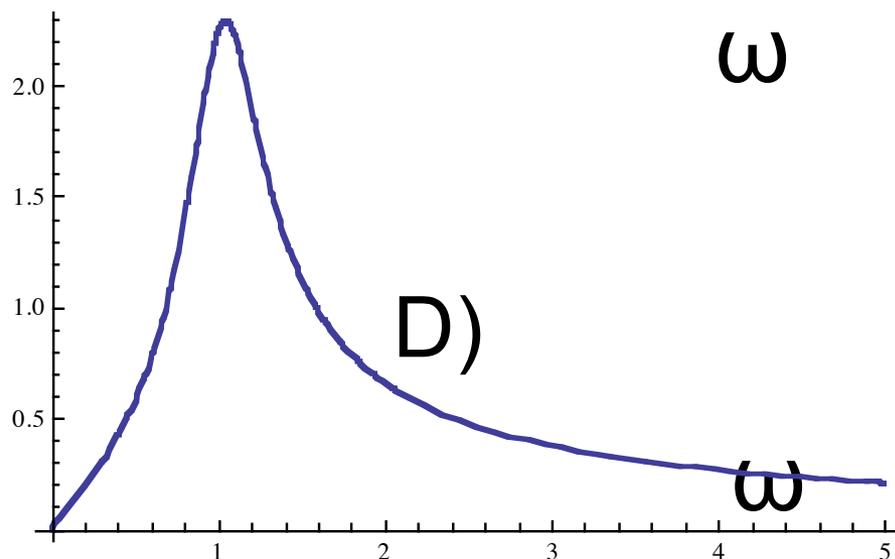
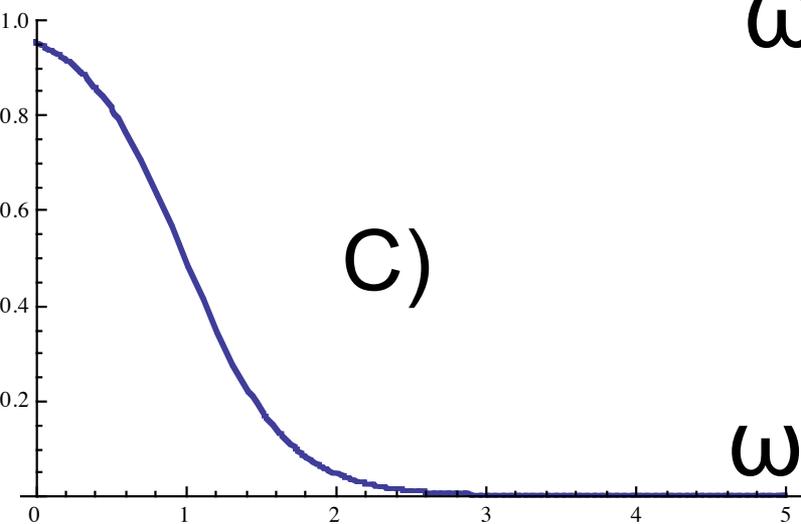
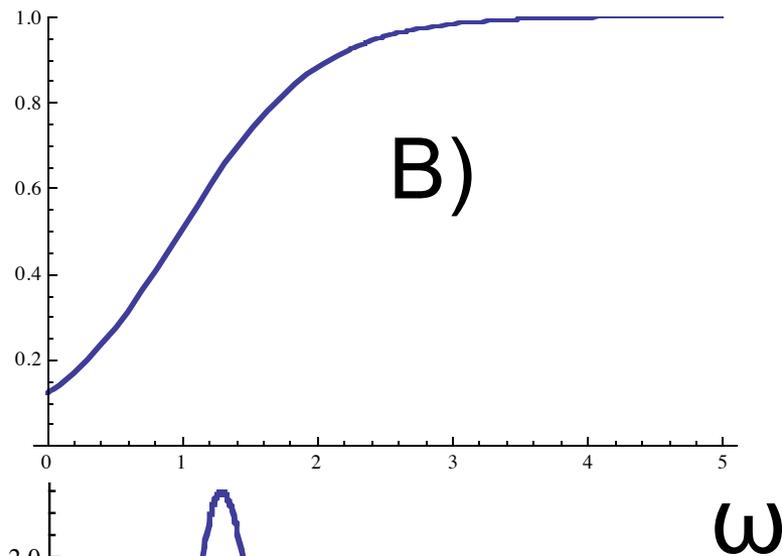
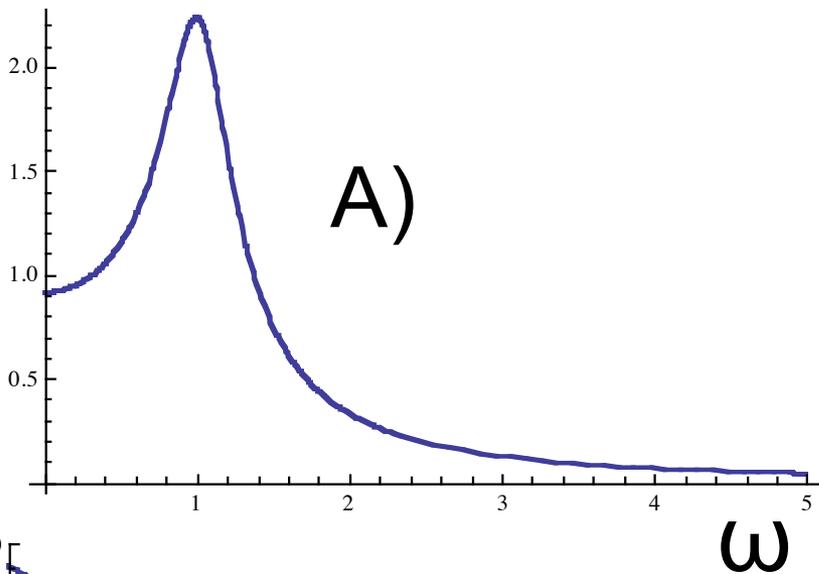
$$A = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$



E) Nenhum deles parece correto?!

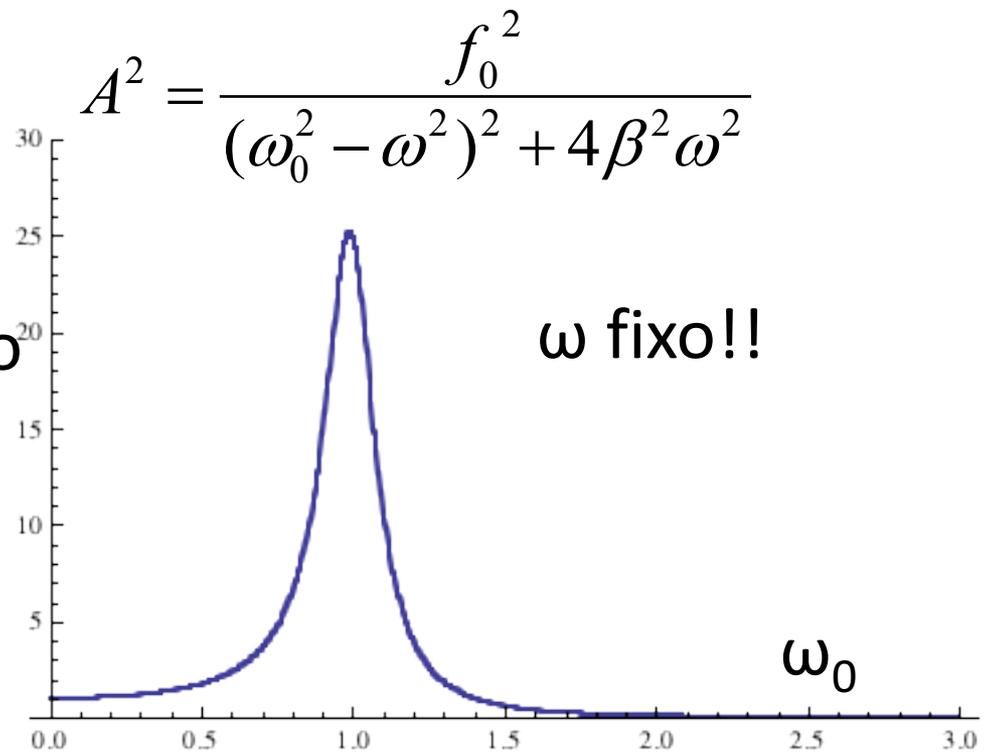
Qual o gráfico de

$$A = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$



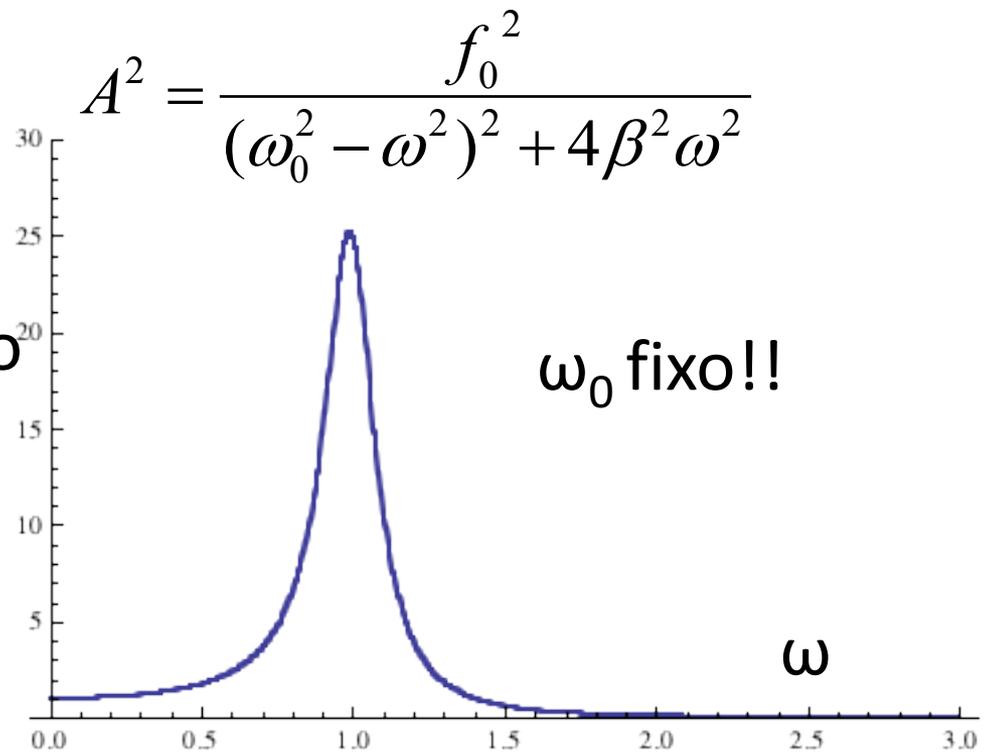
E) Nenhum deles parece correto?!

Se temos um oscilador amortecido e forçado, e aumentamos o amortecimento, β , (deixando todo o resto fixo) o que acontece com a curva mostrada?



- A) Se desloca para a ESQUERDA, e o valor máximo aumenta.
- B) Se desloca para a ESQUERDA, e o valor máximo diminui.
- C) Se desloca para a DIREITA, e o valor máximo aumenta.
- D) Se desloca para a DIREITA, e o valor máximo diminui.
- E) Nenhum destes???

Se temos um oscilador amortecido e forçado, e aumentamos o amortecimento, β , (deixando todo o resto fixo) o que acontece com a curva mostrada?



- A) Se desloca para a ESQUERDA, e o valor máximo aumenta.
- B) Se desloca para a ESQUERDA, e o valor máximo diminui.
- C) Se desloca para a DIREITA, e o valor máximo aumenta.
- D) Se desloca para a DIREITA, e o valor máximo diminui.
- E) Nenhum destes???

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

Na equação diferencial de um circuito RLC, que quantidade é análoga ao termo inercial (massa) do oscilador mecânico?

- A) R, resistência
- B) L, indutância
- C) C, capacitância

Desafio: A que as outras quantidades são análogas?

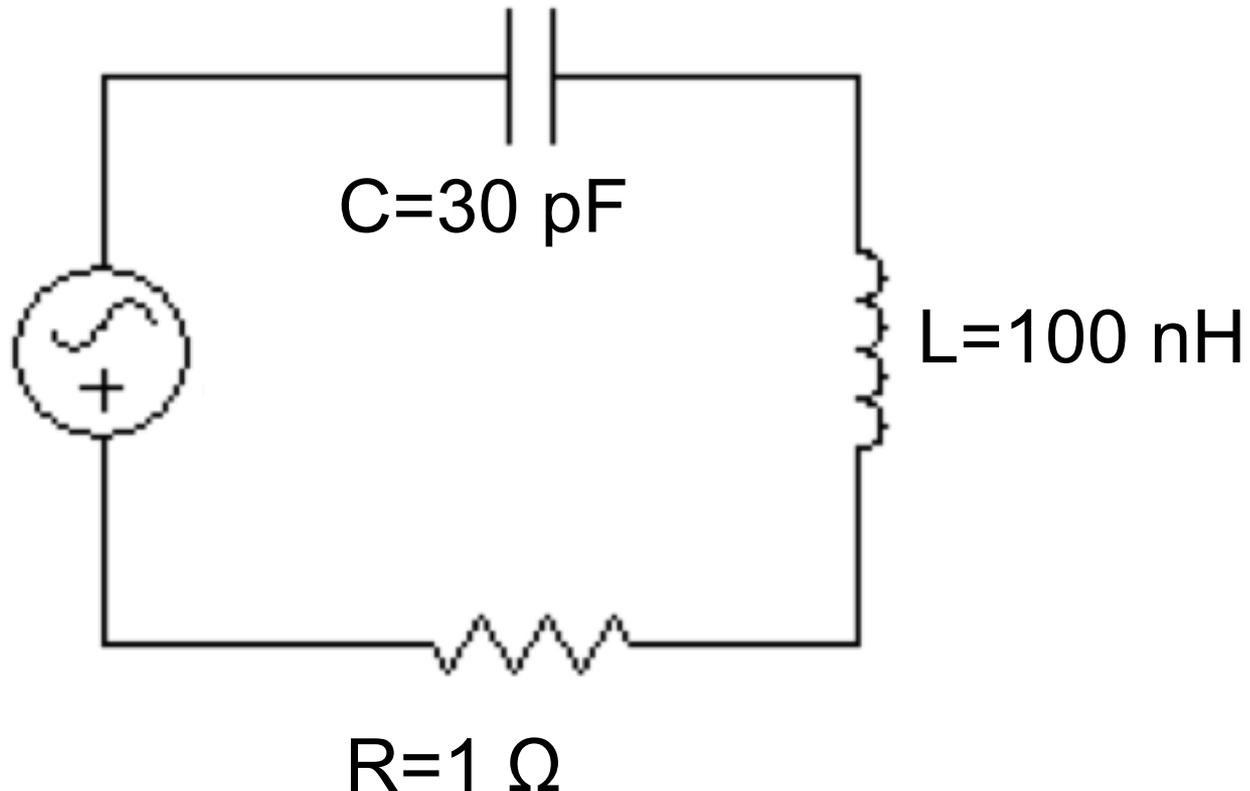
$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

Quanto vale ω_0 ?

- A) C
- B) $1/C$
- C) $1/\sqrt{C}$
- D) $1/LC$
- E) $1/\sqrt{LC}$

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = a_0 e^{i\omega t}$$

Se ligarmos uma fonte de voltagem AC ao circuito abaixo, para qual frequência da fonte teremos carga máxima fluindo através do circuito?



Nossa solução particular é: $x_p(t) = Ce^{i\omega t}$

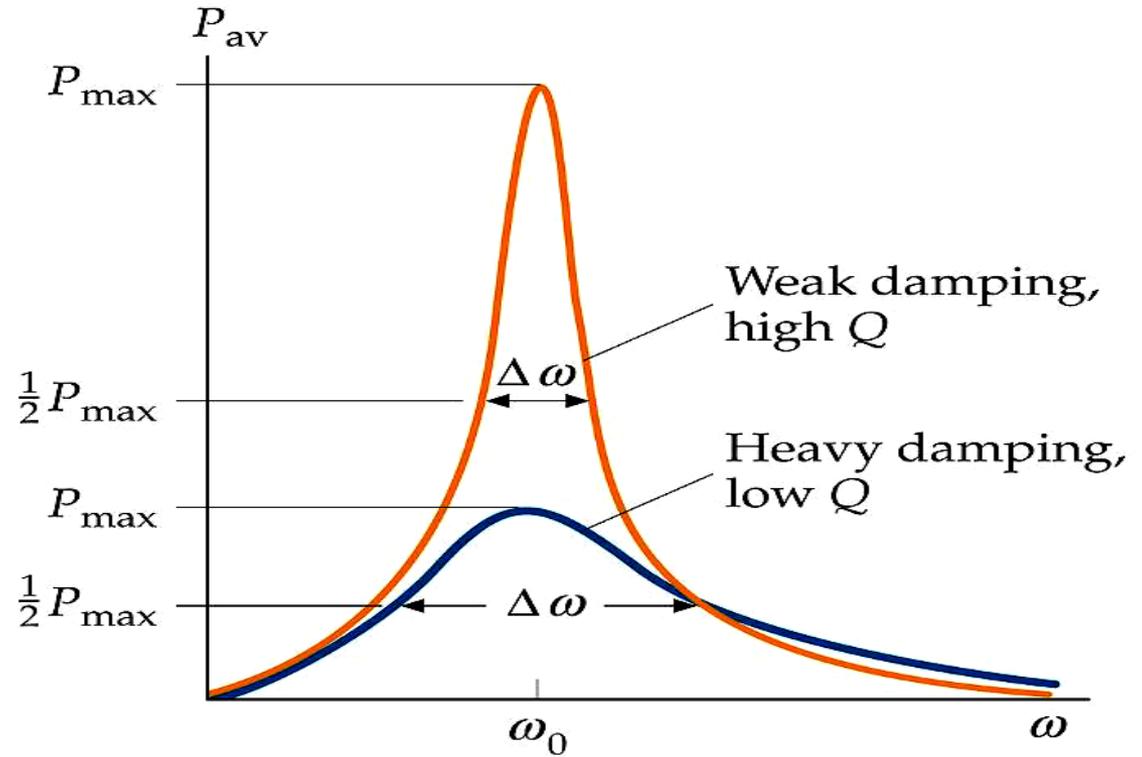
$$\text{com } C = \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\beta\omega i} = Ae^{-i\delta}$$

$$\text{Logo } \delta = \tan^{-1} \frac{2\beta\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Na ressonância, isto significa que a fase entre x e F é:

- A) 0
- B) 90°
- C) 180°
- D) Infinita
- E) Indefinida/???

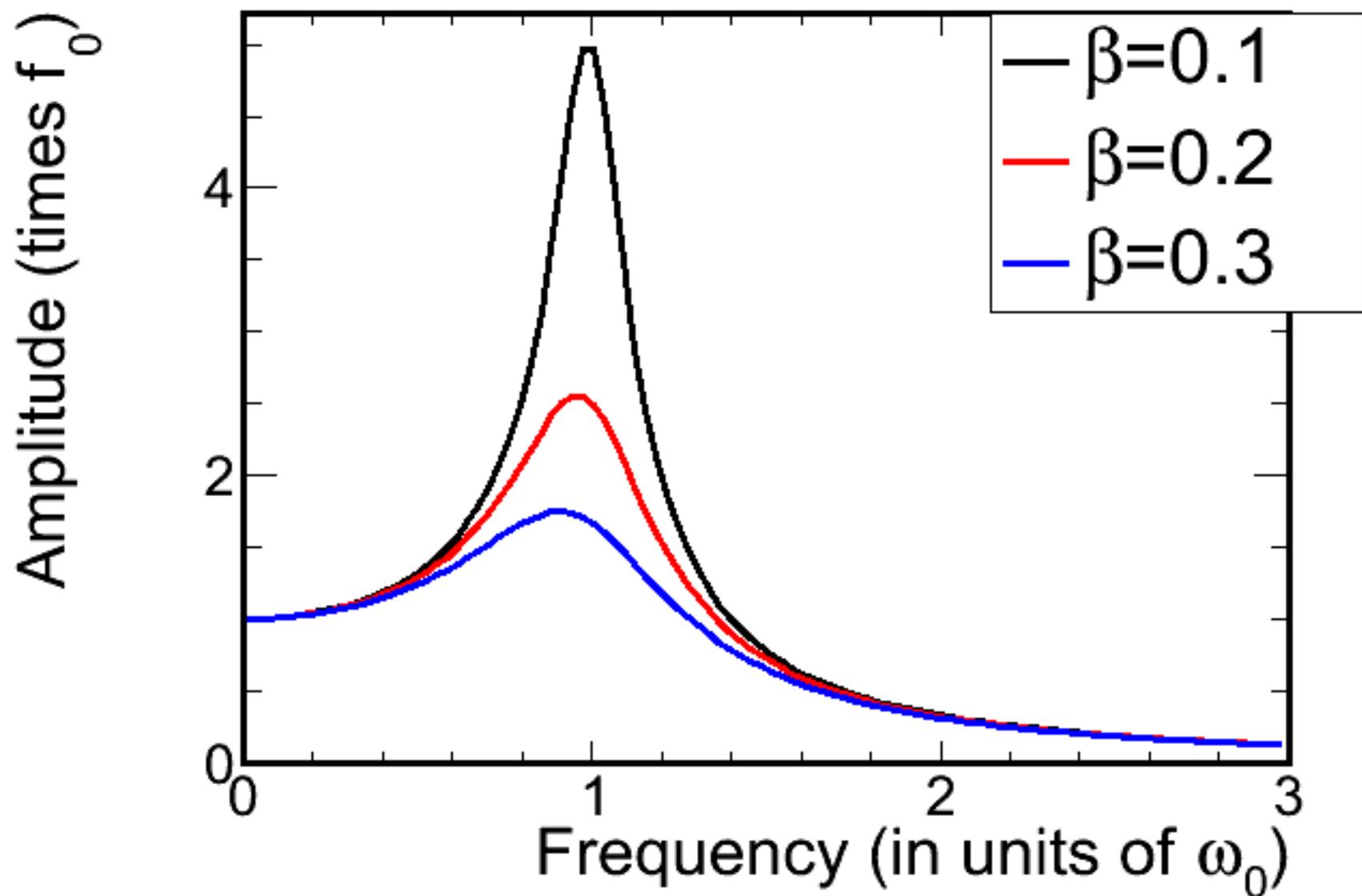
Oscilações Forçadas & Ressonância



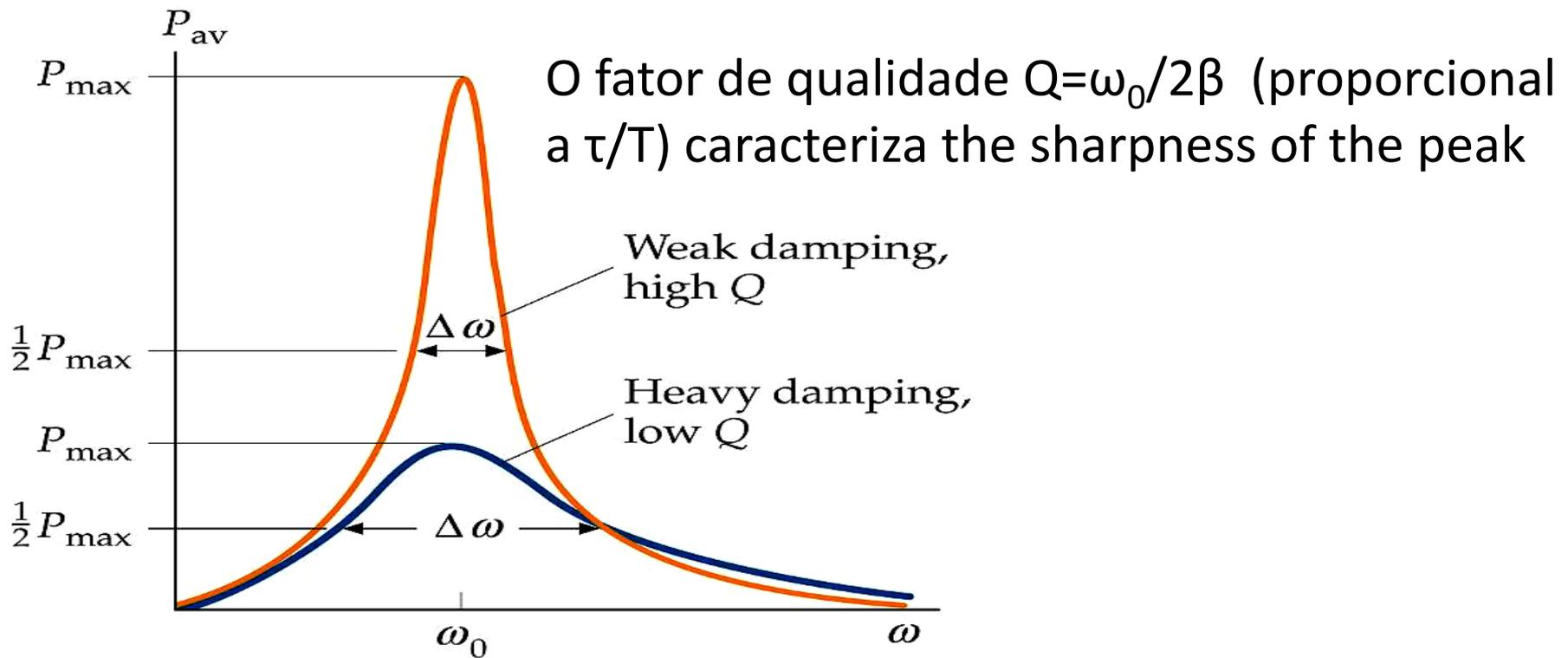
O fator de qualidade Q caracteriza a largura do pico

$$Q = \omega_0 / 2\beta \quad (\text{proportional to } \tau/T)$$

Damped Driven Oscillations



Oscilações Forçadas & Ressonância



Qual o valor (muito) aproximado para o Q de um oscilador harmônico simples mostrado em sala?

A) muito menor que 1

B) da ordem de 1

C) muito maior que 1

A voz humana pode quebrar um copo de vinho se a pessoa cantar precisamente a nota que tem a frequência de ressonância do vidro?

- A) Certamente. Eu mesmo poderia fazê-lo
- B) Um cantor de ópera altamente treinado poderia ser capaz de fazê-lo
- C) Não. Humanos não conseguem cantar com volume ou a frequência precisa o suficiente. Esta é apenas uma lenda urbana.

Myth Busters video

<http://dsc.discovery.com/videos/mythbusters-adam-savage-on-breaking-glass.html>