MECÂNICA GERAL - 1/2017

LISTA 9

1. Considere um objeto de massa m que pode se mover em duas dimensões com uma energia potencial $U(x,y) = \frac{1}{2}kr^2$, onde $r^2 = x^2 + y^2$. Escreva a lagrangiana, usando as coordenadas x e y, e obtenha as equações de movimento de Lagrange. Descreva suas soluções. (Esta é a energia potencial de um íon numa "armadilha de íons", que pode ser usada para estudar as propriedades de íons atômicos individuais.)

2. Considere uma partícula de massa m que se move sobre um plano sem atrito, inclinado de um ângulo α com relação à horizontal. Escreva a lagrangiana em termos das coordenadas cartesianas x, horizontal, e y, orientada para baixo ao longo do plano. O sistema é bidimensional - as coordenadas x e y da partícula são independentes. Não esqueça de incluir a energia potencial gravitacional. Encontre as duas equações de Lagrange e mostre que elas são as que você deveria esperar.

3. Considere duas partículas se movendo sem vínculos em 3 dimensões, com energia potencial $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$.
(a) Escreva as seis equações de movimento obtidas pela aplicação da segunda lei de Newton a cada partícula.
(b) Escreva a lagrangiana $\mathcal{L}\ (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) = T - U$ e mostre que as seis equações de Lagrange são idênticas as equações newtonianas obtidas no item (a). Este resultado demonstra a validade das equações de Lagrange em coordenadas cartesianas, o que por sua vez demonstra o princípio de Hamilton. Como este último é independente do sistema de coordenadas, isto prova a validade das equações de Lagrange em qualquer sistema de coordenadas.

4. (a) Escreva a lagrangiana $\mathcal{L}\ (x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$ para duas partículas de massas iguais $m_1 = m_2 = m$, confinadas a se mover sobre o eixo x e ligadas por uma mola de energia potencial $U = \frac{1}{2}kx^2$, onde x é a deformação da mola $x = x_1 - x_2 - l$ e l é o comprimento da mola quando relaxada, e supomos que a massa 1 esteja sempre à direita da massa 2.
(b) Reescreva $\mathcal{L}$ em termos das novas variáveis $X = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ (a posição do centro de massa) e x (a deformação), e obtenha as duas equações de Lagrange para X e x.
(c) Resolva estas equações obtendo $X(t)$ e $x(t)$ e descreva o movimento.

5. Considere uma conta (ou miçanga) de vidro obrigada a se mover num aro circular rígido de raio R apoiado sobre um plano horizontal xy com seu centro na origem O. Use o ângulo ϕ das coordenadas polares bidimensionais como uma coordenada generalizada para descrever a posição da conta. Escreva as equações que dão as coordenadas cartesianas (x, y) em função de ϕ e a equação que nos dá ϕ em função de x e y.

6. Considere um pêndulo simples suspenso do teto de um vagão de trem que oscila para frente e para trás, de modo que as coordenadas do ponto de suspensão do pêndulo sejam $x_s = Acos(\omega t)$ e $y_s = 0$. Use o ângulo ϕ entre a vertical e o fio do pêndulo como coordenada generalizada e escreva as equações que dão as coordenadas cartesianas da massa do pêndulo em função de ϕ e vice-versa.

7. Um bloco de massa m_1 está apoiado sobre uma mesa horizontal e ligado a um barbante ideal (de massa desprezível). O barbante está estendido na horizontal até a borda da mesa, onde, depois de passar sobre uma roldana ideal (de massa desprezível e sem atrito), fica estendido na vertical com um outro bloco de massa m_2 ligado a sua extremidade. Use como coordenada generalizada a distância x entre a segunda massa e o tampo da mesa, obtenha sua equação de movimento de Lagrange e resolva-a para obter a aceleração dos blocos.