MECÂNICA GERAL - 1/2017

LISTA 7

1. Uma partícula de massa m presa à extremidade de uma mola de constante elástica k está confinada a se mover apenas ao longo do eixo horizontal x sem sofrer a ação de forças dissipativas. No instante $t = 0$ a partícula está em repouso na situação de equilíbrio e é sujeita a um impulso instantâneo para a direita. Ela se move até a posição $x_{max} = A$ e continua a oscilar em tôrno da posição de equilíbrio.
(a) Escreva a equação da conservação de energia deste problema e use-a para encontrar a velocidade da partícula $\dot{x}$ em função de sua posição x e de sua energia total E.
(b) Mostre que $E = 1/2kA^2$ e use este resultado para eliminar E de sua equação para $\dot{x}$. Integre a equação resultante e encontre o tempo necessário para que a partícula se mova de sua posição de equilíbrio em $x = 0$ até uma posição genérica x.
(c) Use o resultado do item anterior para encontrar x em função de t e demonstre que a partícula executa um movimento harmônico simples com período $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

2. Um brinquedo de criança consiste de um cilindro de base circular montado sobre um hemisfério de raio R. O centro de massa do conjunto, quando este está apoiado sobre o hemisfério, fica a uma altura h acima do chão.
(a) Escreva uma equação para a energia potencial gravitacional do brinquedo quando este é inclinado de um ângulo θ com relação à vertical. (Para isso, será necessário encontrar a altura do centro de massa em função da inclinação θ. Como ajuda, pense primeiro na altura do centro do hemisfério quando o brinquedo está inclinado).
(b) Para que valores de R e h a posição de equilíbrio $\theta = 0$ é estável?

3. Considere a máquina de Atwood discutida nas notas de aula, mas suponha agora que a roldana tem raio R e momento de inércia I.
(a) Escreva a equação para a energia total do sistema E em termos de x e $\dot{x}$. (Lembre que a energia cinética da roldana é $1/2I\omega^2$).
(b) Prove que é possível obtermos a equação de movimento para a coordenada x tomando a derivada da equação $E = \textit{constante}$ - o que é verdade para qualquer sistema conservativo unidimensional. Obtenha a mesma equação usando diretamente a 2^a lei de Newton para cada uma das massas e para a roldana, e eliminando em seguida as duas tensões desconhecidas.

4. Uma massa m se move em uma órbita circular centrada na origem sob a ação de uma força central atrativa com energia potencial $U = kr^n$. Prove que $T = nU/2$, resultado muito útil conhecido como o **teorema do virial**.

5. Na aula expositiva, eu afirmei que uma força $\vec{F}(\vec{r})$ que seja central e esfericamente simétrica é automaticamente conservativa. Prove este importante resultado de duas maneiras distintas:
(a) Como a força é central e esfericamente simétrica, podemos escreve-la na forma $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\hat{r}$. Use coordenadas cartesianas e demonstre que isto implica que $\nabla \times \vec{F} = 0$.
(b) Ainda mais rápido: procure em um livro de matemática a expressão para o rotacional em coordenadas esféricas e use-a para mostrar que $\nabla \times \vec{F} = 0$.

6. Considere colisões elásticas entre duas partículas de massas diferentes m_1 e m_2 e demonstre os

seguintes resultados clássicos:
(a) Se a colisão for unidimensional, então a velocidade relativa depois da colisão é simétrica (isto é, tem mesmos módulo e direção, mas sentido oposto) à velocidade relativa antes da colisão.
(b) Se a colisão for bidimensional e a partícula de massa m_2 estiver inicialmente em repouso, então o ângulo θ entre as duas velocidades finais satisfaz ás desigualdades: (i) $\theta < \pi/2$ se $m_1 > m_2$; $\theta > \pi/2$ se $m_1 < m_2$.