MECÂNICA GERAL - 2/2017

LISTA 6

1. Considere um planeta que orbita um sol (uma estrela) fixo. Escolha o plano xy como o plano da órbita, com o sol na origem, e use as coordenadas polares (r, ϕ) para indicar (rotular) a posição do planeta. Mostre que o momento angular do planeta em relação a esta origem tem módulo $l = mr^2\omega$, onde $\omega = \dot{\phi}$ é a velocidade angular com que o planeta orbita seu sol.

2. Calcule o trabalho realizado pela força bidimensional $\vec{F} = (x^2, 2xy)$ sobre o caminho dado parametricamente por $x = t^3$ e $y = t^2$ ligando a origem ao ponto $P = (1, 1)$.

3. Determine quais da forças abaixo é (são) conservativa(s) - k é uma constante com a dimensão adequada. Para aquela(s) que for(em) conservativa(s), encontre a energia potencial U associada e verifique, por diferenciação direta, que $\vec{F} = -\nabla U$.
(a) $\vec{F} = k(x, 2y, 3z)$.
(b) $\vec{F} = k(y, x, 0)$.

4. Use a expressão da diferencial de uma função escalar de argumento vetorial $f(\vec{r})$ em termos de seu gradiente ($df = \nabla f \cdot d\vec{r}$) para demonstrar as seguintes importantes propriedades, discutidas no tutorial 4:
(a) O vetor ∇f em um ponto qualquer $\vec{r}_A$ é perpendicular a superfície que contém os pontos nos quais o valor de f é igual a $f(\vec{r}_A)$ (chamada uma superfíicie equipotencial de f). (Sugestão: considere um pequeno deslocamento $d\vec{r}$ sobre a superfície equipotencial de f. Quanto vale df neste deslocamento?)
(b) A direção de ∇f em um ponto qualquer $\vec{r}_A$ é a direção ao longo da qual o valor de f muda mais rapidamente quando nos afastamos de $\vec{r}_A$. (Sugestão: considere um pequeno deslocamento $d\vec{r} = \epsilon\hat{u}$, onde $\hat{u}$ é um vetor unitário e ϵ é fixo e pequeno. Encontre qual deve ser a direção de $\hat{u}$ para a qual o df correspondente é máximo, lembrando que $\vec{a} \cdot \vec{b} = abcos(\theta)$)

5. A força exercida por uma mola (unidimensional) presa por uma de suas extremidades é restauradora e tem módulo $F = kx$, onde x é o deslocamento de sua outra extremidade com relação à posição de equilíbrio e k é uma constante que depende da natureza da mola.
(a) Mostre que esta força é conservativa. Demonstre que ela está associada a uma energia potencial dada por $U = (1/2)kx^2$ se escolhermos o zero da energia potencial na situação em que a mola está completamente relaxada (posição de equilíbrio).
(b) Suponha agora que a mola é suspensa do teto, com uma massa m presa a sua extremidade livre e limitada a se mover apenas na direção vertical. Encontre a distensão (ou elongação) da mola x_0 em sua nova posição de equilíbrio. Mostre que a energia potencial total (elástica mais gravitacional) tem a forma $(1/2)ky^2$ se a coordenada y mede o deslocamento a partir da nova posição de equilíbrio e redefinirmos o zero de energia potencial para este ponto.