MECÂNICA GERAL - 2/2017

LISTA 10

1. Escreva a Lagrangeana para um cilindro de massa m, raio R e momento de inércia I que rola sem deslizar sobre um plano inclinado de um ângulo α com relação à horizontal. Use a distância percorrida pelo cilindro a partir do ponto mais alto do plano (oriente um eixo x para baixo ao longo da rampa) como coordenada generalizada. Obtenha a equação de Lagrange e resolva-a para achar a aceleração do centro de massa do cilindro $\ddot{x}$. Lembre que $T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$, onde v é a velocidade do centro de massa do cilindro e ω é sua velocidade angular.

2. Considere dois objetos de massas m_1 e m_2 que se movem num campo gravitacional uniforme $\vec{g}$ e interagem através de uma energia potencial $U(r)$.
(a) Mostre que a Lagrangeana deste sistema pode ser decomposta em duas parcelas, uma ligada ao movimento do centro de massa (CM) do sistema e outra à posição relativa $\vec{r}$.
(b) Escreva as equações de Lagrange para as coordenadas do CM X, Y e Z e descreva o movimento do CM.
(c) Escreva as equações de Lagrange para as coordenadas relativas e mostre que o movimento de $\vec{r}$ é o mesmo que o de uma partícula de massa igual à massa reduzida μ, com posi cc̃ao $\vec{r}$ e energia potencial $U(r)$.

3. (a) Analise a energia potencial efetiva obtida para o problema de dois corpos sob a ação de uma força central conservativa e determine o raio da órbita circular possível para um planeta (ou cometa) de momento angular ℓ. (Sugestão: olhe para dU_{ef}/dr.)
(b) Mostre que esta órbita circular é estável, no sentido que qualquer pequena perturbação radial provocará apenas pequenas oscilações radiais (olhe para d^2U_{ef}/dr^2.) Mostre que o período destas oscilações é igual ao período orbital do planeta.

4. Um satélite da Terra é observado em seu perigeu a uma altura de $250km$ acima da superfície terrestre e com uma velocidade de $8500m/s$. Determine a excentricidade de sua órbita e sua altura acima da superfície terrestre no apogeu. O raio da Terra é $R_T \approx 6,4 \times 10^6 m$. Você também vai precisar do produto GM_T mas este é fácil de determinar se você lembrar que $GM_T/R_T^2 = g$.

5. O que aconteceria com a órbita da Terra (que podemos, para efeito deste problema, considerar como circular) se metade da massa do Sol subitamente desaparecesse? Nosso planeta continuaria ligado ao sistema solar se isso ocorresse? (Sugestões: considere o que aconteceria com as energias cinética e potencial da Terra no momento do cataclísmico desaparecimento. O teorema do virial para órbitas circulares - problema 4 da lista 7 - ajuda a responder a esta pergunta.) Trate o Sol - ou o que dele restar - como fixo.