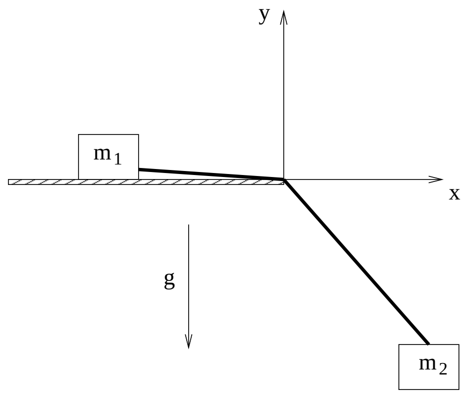
Tutorial: Mecânica Lagrangiana



Duas massas m_1 e m_2 estão ligadas por uma corda de massa desprezível e comprimento ℓ. Como mostra a figura, uma delas se apoia no tampo de uma mesa com atrito desprezível, enquanto a outra está pendurada na borda. Vamos tratar este sistema como **bidimensional**, e começaremos usando coordenadas cartesianas (x, y) como mostrado. Note, em particular, que isto significa que o **bloco 2 está livre para oscilar no plano do papel!** Despreze o pequeno ângulo que a parte da corda acima da mesa faz com a horizontal.

I. Escolha das coordenadas

A. Use as coordenadas cartesianas dos dois blocos, (x_1, y_1) e (x_2, y_2), para escrever equações que representem todos os vínculos a que este sistema está sujeito.

B. Quantos graus de liberdade tem este sistema?

C. Represente um conjunto de coordenadas generalizadas apropriado no diagrama acima. Obtenha as relações entre elas e as coordenadas cartesianas.

D. [*Discussão*] Ao tratar este sistema como bidimensional, estamos ignorando as coordenadas z_1 e z_2, sabendo que se $z_1(0) = z_2(0) = 0$ o sistema não se move na direção z. O que se pode dizer sobre a coordenada x_1 — será ela *ignorável*? Por que ou por que não?

PARE AQUI e converse com o instrutor sobre suas respostas!

II. Construindo a lagrangiana

Vamos agora prosseguir e escrever a lagrangiana que descreve este sistema.

A. Escreva a energia potencial U em termos das coordenadas cartesianas e use as relações obtidas no item **C** acima para reescrevê-la em termos das coordenadas generalizadas.

B. Calcule as derivadas em relação ao tempo das coordenadas cartesianas em termos das coordenadas generalizadas e suas derivadas, e use os resultados para escrever a energia cinética T.

C. Combine suas respostas aos itens **A** e **B** para obter a lagrangiana, $\mathcal{L}$.

D. [*Discussão*] Suponha que, em vez de ter um comprimento fixo, a corda que liga os dois blocos esteja enrolada num carretel no interior do bloco sobre a mesa, e que a partir do instante $t = 0$ comeą a se desenrolar a uma taxa constante $d\ell/dt = w$. Será que teremos que modificar as coordenadas generalizadas para levar isto em conta? E como fica agora a energia potencial? E a energia cinetica?

PARE AQUI e converse com o instrutor sobre suas respostas!

III. Estudo do movimento

A. Escreva as equações de Lagrange para obter as equações de movimento deste sistema.

B. Não sabemos resolver estas equações analiticamente, mas vamos ver o que podemos descobrir sobre o movimento resultante em certos limites. No que se segue, vamos supor que **o sistema parte do repouso**. Suponha que o bloco 2 inicia seu movimento diretamente abaixo do tampo da mesa, isto é, $x_2(0) = 0$. Mostre que uma das coordenadas generalizadas não se altera com o passar do tempo, e escreva uma equação para a aceleração da(s) outra(s) coordenada(s) generalizada(s).

C. Suponha agora que $x_2(0)$ não é zero mas é pequeno. Retorne às equações de movimento completas e expanda-as em série até primeira ordem na coordenada generalizada pequena. (Você pode supor que sua derivada temporal também é pequena.) Mostre que nesta ordem de aproximação você encontra a mesma equação de movimento para a outra coordenada generalizada que você encontrou na parte **B**. Como um teste adicional, mostre que no limite $m_1 \to \infty$ se recupera a equação de movimento de um pêndulo simples na aproximação de pequena amplitude.

D. [*Discussão*] Mesmo para oscilações de pequena amplitude, nós continuamos incapazes de expressar a solução de uma das equações obtidas na parte **C** em termos de funções elementares. Usando o que você já sabe sobre o oscilador harmônico amortecido, construa um raciocínio que mostre que o sistema vai se mover (para pequenas oscilações) como um pêndulo para o qual tanto a amplitude quanto a frequência decrescem com o tempo.

PARE AQUI e discuta suas respostas com o instrutor!
