Taylor Cap. 2: Projéteis, arrasto, força magnética e a matemática das EDO

Classifique esta EDO:

$$y''(x) = \sin(x)\, y(x)$$

A) 1ª ordem, não linear
B) 1ª ordem, linear
C) 2ª ordem, não linear
D) 2ª ordem, linear

Classifique esta EDO:

$$y'' + x^2y + 1 = 0$$

A) Linear (não homogênea)
B) Homogênea (não linear)
C) Linear e homogênea
D) Não linear e Inomogênea

Classifique esta EDO:

$$y' = \sin(y) + 1$$

A) Linear, não homogênea
B) Homogênea, não linear
C) Linear e homogênea
D) Não linear e não homogênea

Esta EDO é homogênea?

$$y'' = (x+1)y$$

A) Sim
B) Não
C) ???

Quais destas EDOs para y(t) são separáveis?

i) $y' = \frac{y^2}{t} - t$

ii) $y' = e^t \frac{y+1}{\sqrt{t}}$

iii) $y' = 3 - t$

A) nenhuma
B) i & ii
C) ii & iii
D) todas

Considere a EDO:
$dN/dt - kN = 0$ com $k>0$ e $N(t=0)=N_0>0$.

Como $N(t)$ se comporta quando $t \rightarrow \infty$?

A) $N(t)$ decai para zero
B) $N(t)$ se aproxima de um valor constante
C) $N(t)$ permanece constante
D) $N(t)$ diverge (se aproxima de ∞)

Num problema para casa, um estudante deduziu uma fórmula para a posição. O problema envolve a aceleração da gravidade e uma "força de arrasto" F= -cv, onde v é a velocidade. Eis a fórmula obtida:

$$y(t) = y_{init} \ln(1 + \frac{cv_{init}}{g})$$

Será que há alguma maneira de verificar se algum erro foi cometido sem ter que examinar a dedução em detalhe?

A) Sim, consigo ver um teste bem simples!

B) A resposta deve ser sim, mas não consigo ver o "truque"

C) Com uma fórmula tão complicada, a única maneira é fazer tudo de novo (ou comparar com a resposta de outro aluno…)

Considere a equação $dv/dt = -k\, v$, onde v é velocidade, t é tempo, e k é uma constante.

Que movimento ela descreve?

A) uma massa presa a uma mola
B) uma massa em queda livre
C) uma massa sob ação de uma força de arrasto
D) uma massa sob ação de força a favor do movimento

Você resolve uma EDO que descreve o movimento de uma partícula e encontra $x(t) = c(t-t_0)$

O que você pode concluir?

A) A partícula se move sob ação de uma força constante
B) A partícula está livre (força nula)
C) A força sobre a partícula varia com o tempo
D) Nenhuma das alternativas acima

Você resolve uma EDO que descreve o movimento de uma partícula e encontra
$x(t) = bt^2$.

O que você pode concluir?

A) A partícula se move sob ação de uma força constante
B) A partícula está livre (força nula)
C) A força sobre a partícula varia com o tempo
D) Nenhuma das alternativas acima

Você resolve uma EDO que descreve o movimento de uma partícula e encontra:

$$x(t) = c(1 - e^{-t/\tau})$$

O que você pode concluir?

A) A partícula se move sob ação de uma força constante
B) A partícula está livre (força nula)
C) A força sobre a partícula varia com o tempo
D) Nenhuma das alternativas acima

Para um objeto de “diâmetro D”,

$f_{linear}=bv=\beta Dv$

$f_{quad} = cv^2 = (1/2)c_0 A \rho_{air} v^2$

Para uma esfera no ar, $f_{quad}/f_{linear} \approx (1600\ s/m^2)\ Dv$

Qual forma de arrasto domina na maioria dos contextos da microbiologia?

A) linear
B) quadrático
C) Impossível dizer

Para um objeto de “diâmetro D”,
$f_{linear}=bv=\beta Dv$

$f_{quad} = cv^2 = (1/2)c_0 A \rho_{air} \; v^2$

Para uma esfera no ar, $f_{quad}/f_{linear} \approx (1600 \text{ s/m}^2)\, Dv$

Qual forma de arrasto domina na maioria dos eventos esportivos?

A) linear
B) quadrático
C) impossível dizer

Um objeto em queda no ar satisfaz a EDO :

$$m\, dv/dt = -mg - bv$$

Esta equação envolve três parâmetros dimensionais (m, g, b)

a) Use estes três parâmetros para criar escalas "naturais" de massa (M_0), comprimento (L_0), e tempo (T_0)

b) Use estas três escalas naturais para criar uma escala natural para a velocidade (V_0)

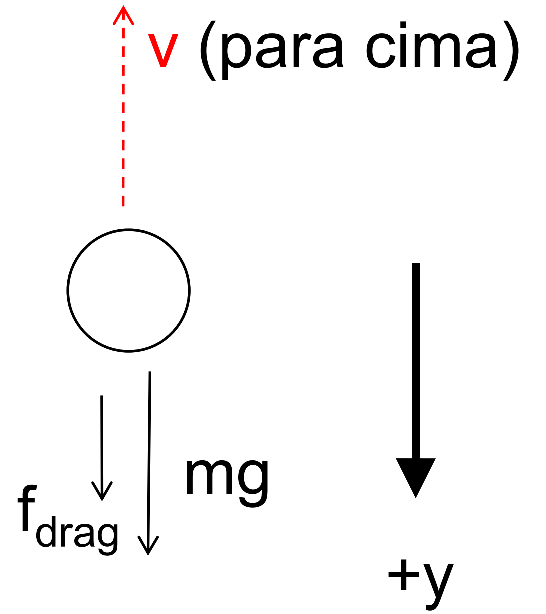
c) Defina uma *velocidade adimensional V* pela equação $V=v/V_0$, e reescreva a EDO original como uma equação para V.

(*Esta equação NÃO pode conter parâmetros com dimensão, exceto quando aparecerem em combinações manifestamente adimensionais)*

A força de arrasto é: $\vec{f}_D = -b\vec{v} - cv^2\hat{v}$

Considere uma massa que se move PARA CIMA.
(Defina PARA BAIXO como sendo o sentido +y)

Qual a equação de movimento correta?



A) $m\,dv_y/dt = +mg - bv_y - cv_y^2$

B) $m\,dv_y/dt = +mg - bv_y + cv_y^2$

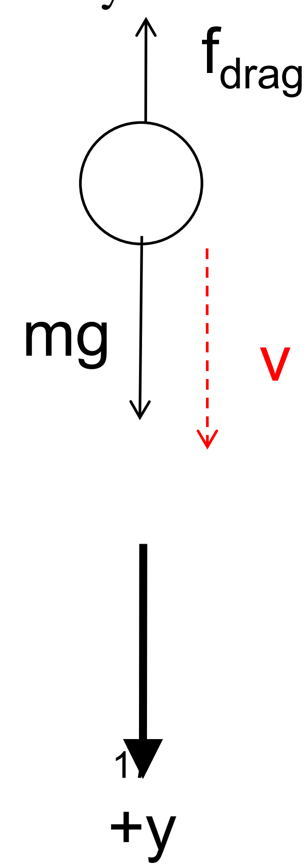
C) $m\,dv_y/dt = +mg + bv_y - cv_y^2$

D) $m\,dv_y/dt = +mg + bv_y + cv_y^2$

E) Other!

A força de arrasto é $\vec{f}_D = -b\vec{v} - cv^2\hat{v}$

(Defina PARA BAIXO como o sentido +y)
Quando a massa se movia *para cima*, a equação correta era: $m\,dv_y/dt = +mg - bv_y + cv_y^2$



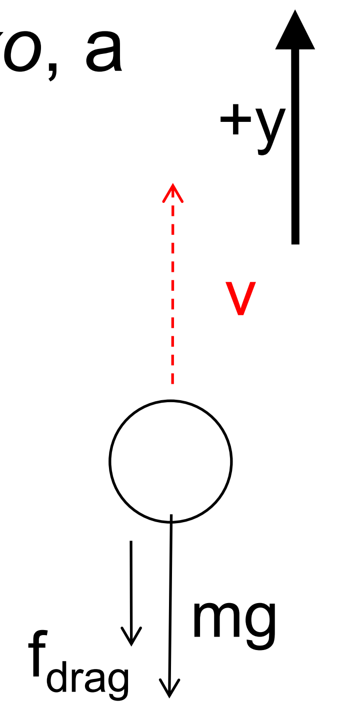
Se o objeto se move PARA BAIXO, qual (quais) termo(s) da equação muda de sinal?

A) mg (apenas)
B) o termo linear (apenas)
C) o termo quadrático (apenas)
D) *mais de um* termo muda de sinal

A força de arrasto é $\vec{f}_D = -b\vec{v} - cv^2\hat{v}$

Se o movimento é *para cima* e +y é *para baixo*, a expressão correta é:

$$m\, d\mathrm{v}_y/dt \;=\; +\mathrm{mg} - b\mathrm{v}_y \;+ \mathrm{cv}_y^{\;2}$$



Vamos agora definir PARA CIMA como o sentido +y

Qual (quais) termo(s) vão mudar de sinal?

A) mg (apenas)

B) o termo linear (apenas)

C) o termo quadrático (apenas)

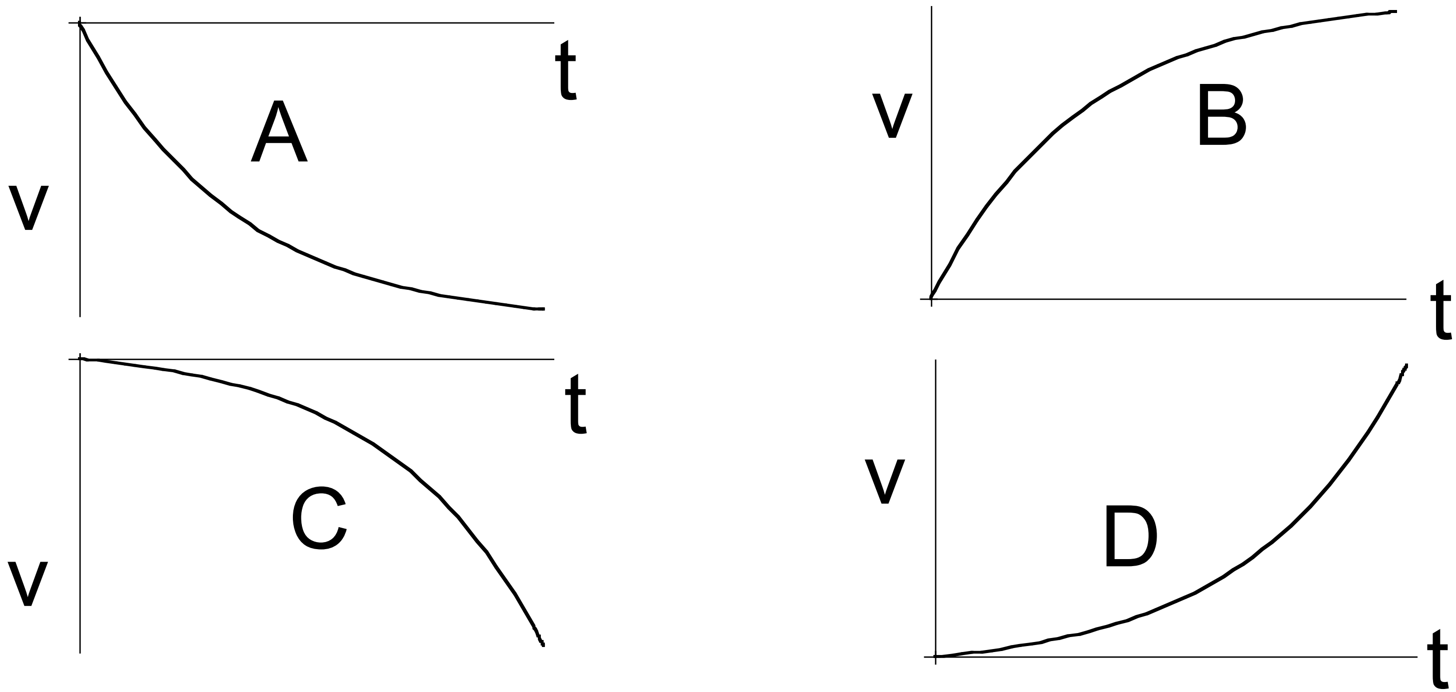
D) *mais* de um termo troca de sinal

Você tem duas esferas sólidas feitas do *mesmo material*, mas uma delas tem maior diâmetro que a outra. Quando as deixamos cair na atmosfera, qual delas vai atingir maior velocidade terminal?

A) a maior
B) a menor
C) as duas vão atingir a mesma velocidade terminal

A solução da equação que descreve a velocidade de um objeto caindo a partir do repouso sob ação de arrasto linear é $v_y(t) = -v_t(1 - e^{-t/\tau})$

Que gráfico melhor representa esta solução?



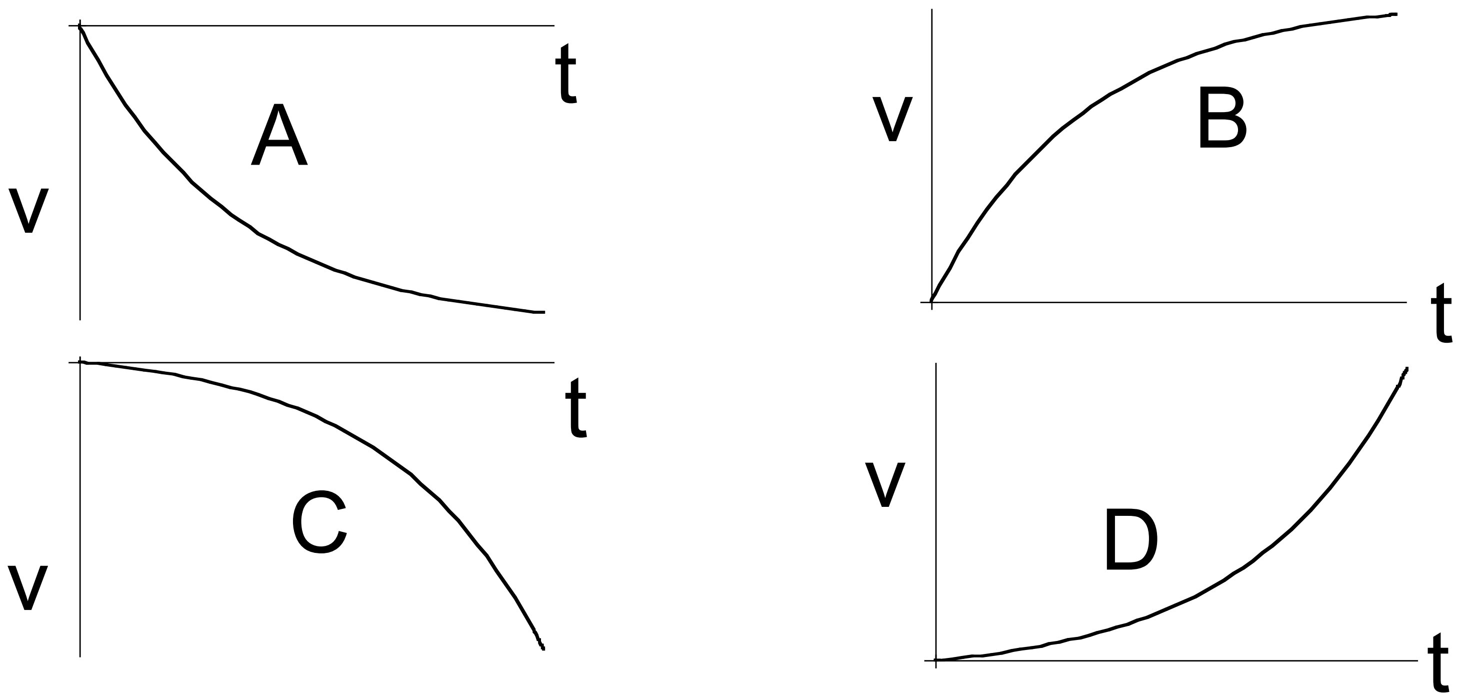
Uma bola de tenis é golpeada diretamente para cima na vertical com velocidade inicial v_0. Compare o tempo T que ela leva para alcançar a altura máxima (H) com o tempo e altura que alcançaria no vácuo.

A) $T > T_{vacuo}$, $H \approx H_{vacuo}$
B) $T > T_{vacuo}$, $H < H_{vacuo}$
C) $T \approx T_{vacuo}$, $H < H_{vacuo}$
D) $T < T_{vacuo}$, $H < H_{vacuo}$

A solução da equação que descreve a velocidade de um objeto que cai a partir do repouso sob ação de arrasto quadrático é

$$v_y(t) = -v_t \tanh(gt/v_t)$$

Qual gráfico melhor representa esta solução?

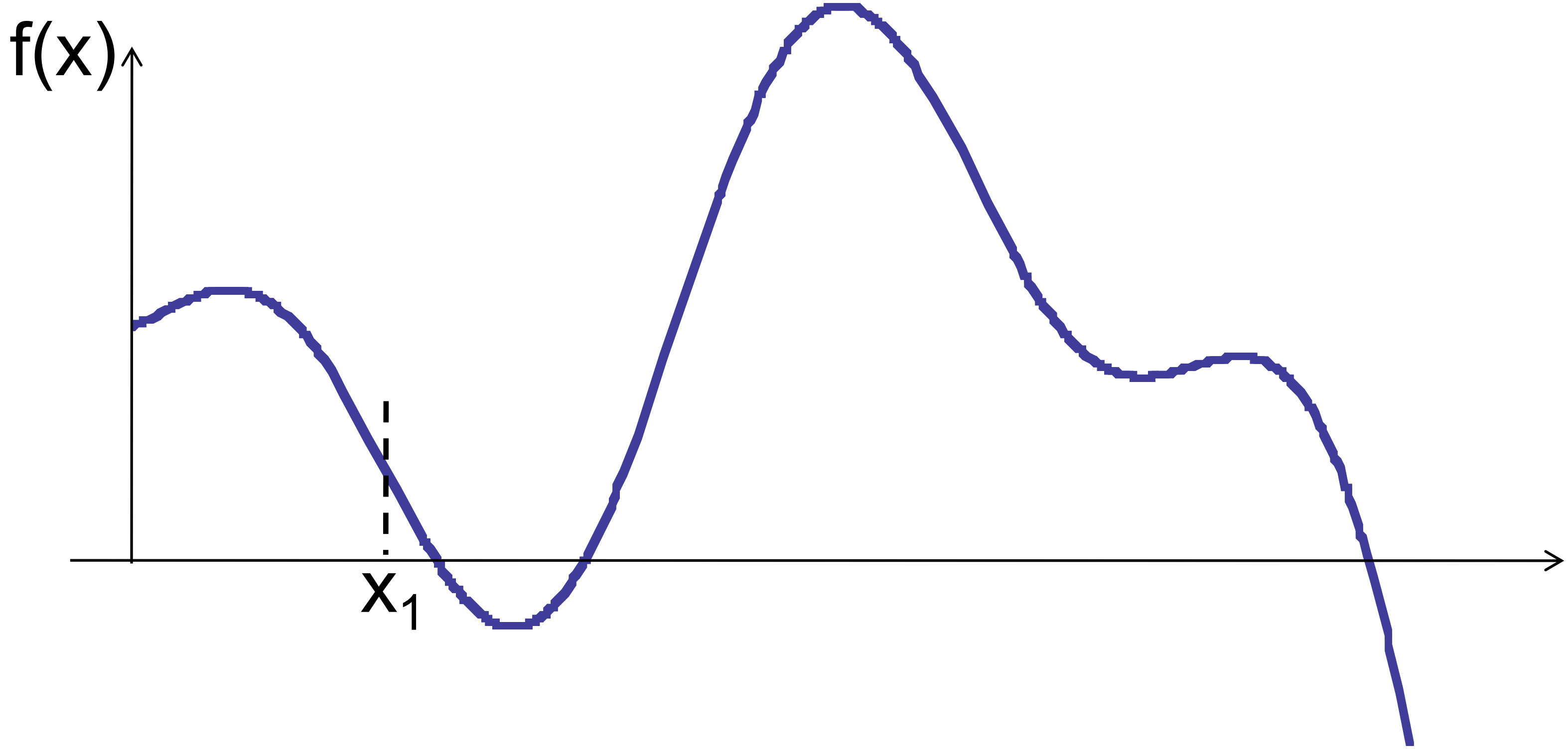


Um objeto é lançado na vertical para cima com velocidade inicial v_0. Compare o tempo t_1 que leva para alcançar o ponto mais alto de sua trajetória com o tempo t_2 que leva para voltar ao ponto de lançamento.

A) $t_1 > t_2$
B) $t_1 = t_2$
C) $t_1 < t_2$
D) A resposta é diferente nos casos $v_0 > v_t$ ou o contrário.

Se você considerar um arrasto linear, como muda (qualitativamente) o alcance horizontal de um projétil (com ângulo de lançamento e v_0 fixados)?

A) Ele diminui (por causa do arrasto horizontal)
B) Ele aumenta (porque fica no ar *mais tempo!*)
C) Qualquer das duas coisas pode acontecer… (é ambíguo por causa das duas razões acima)



Se expandimos f(x) em série de Taylor em torno do ponto x_1, $f(x) = a_0 + a_1 (x-x_1) + a_2 (x-x_1)^2 + ...$

Quais vão ser o sinais de a_0 e a_1?

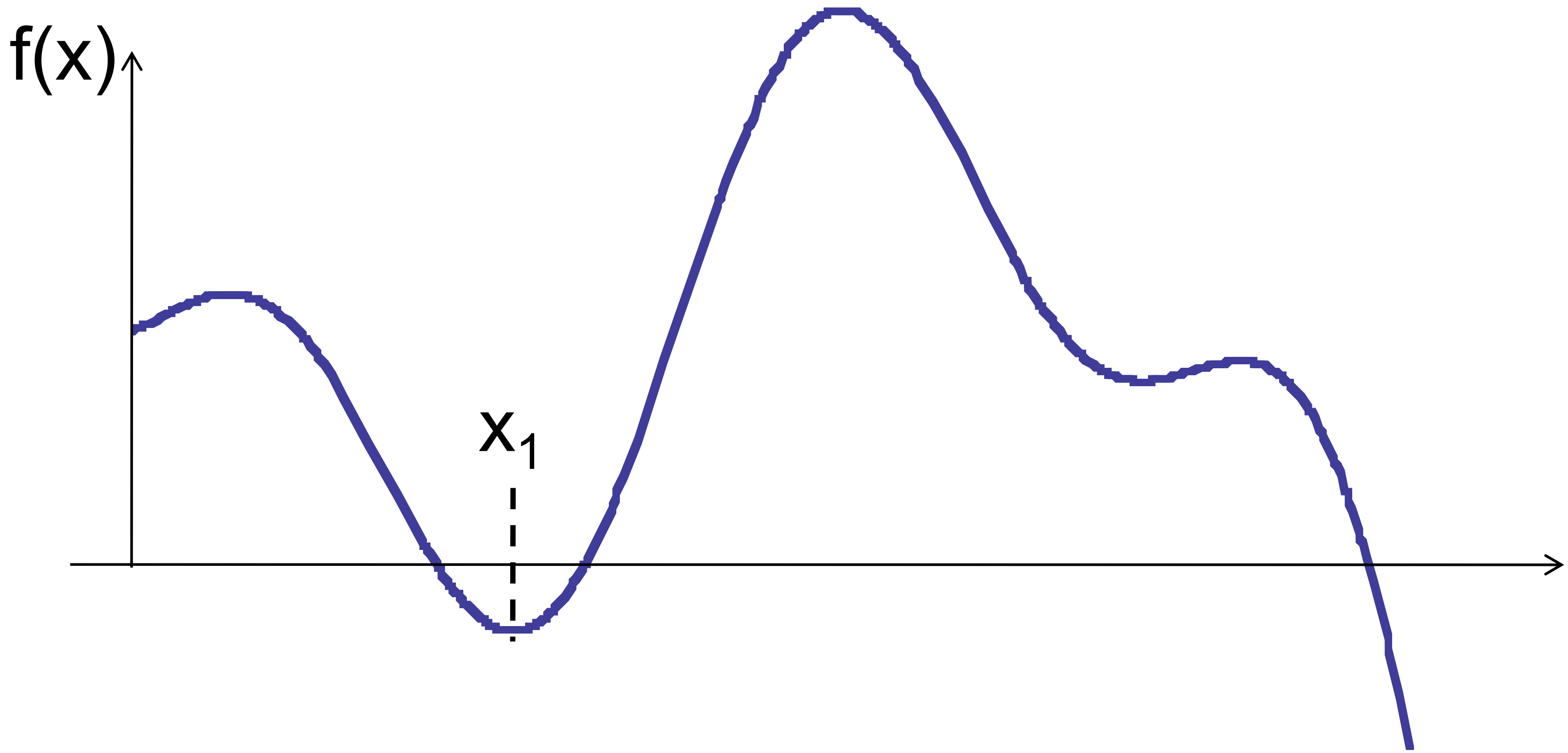
A) a_0 é +, a_1 é +

B) a_0 é +, a_1 é –

C) a_0 é -, a_1 é +

D) a_0 é -, a_1 é –

E) nenhum destes (um deles é 0)



Se expandimos f(x) em série de Taylor em torno do ponto x_1, $f(x) = a_0 + a_1 (x - x_1) + a_2 (x - x_1)^2 + \ldots$

Quais vão ser o sinais de a_0 e a_1?

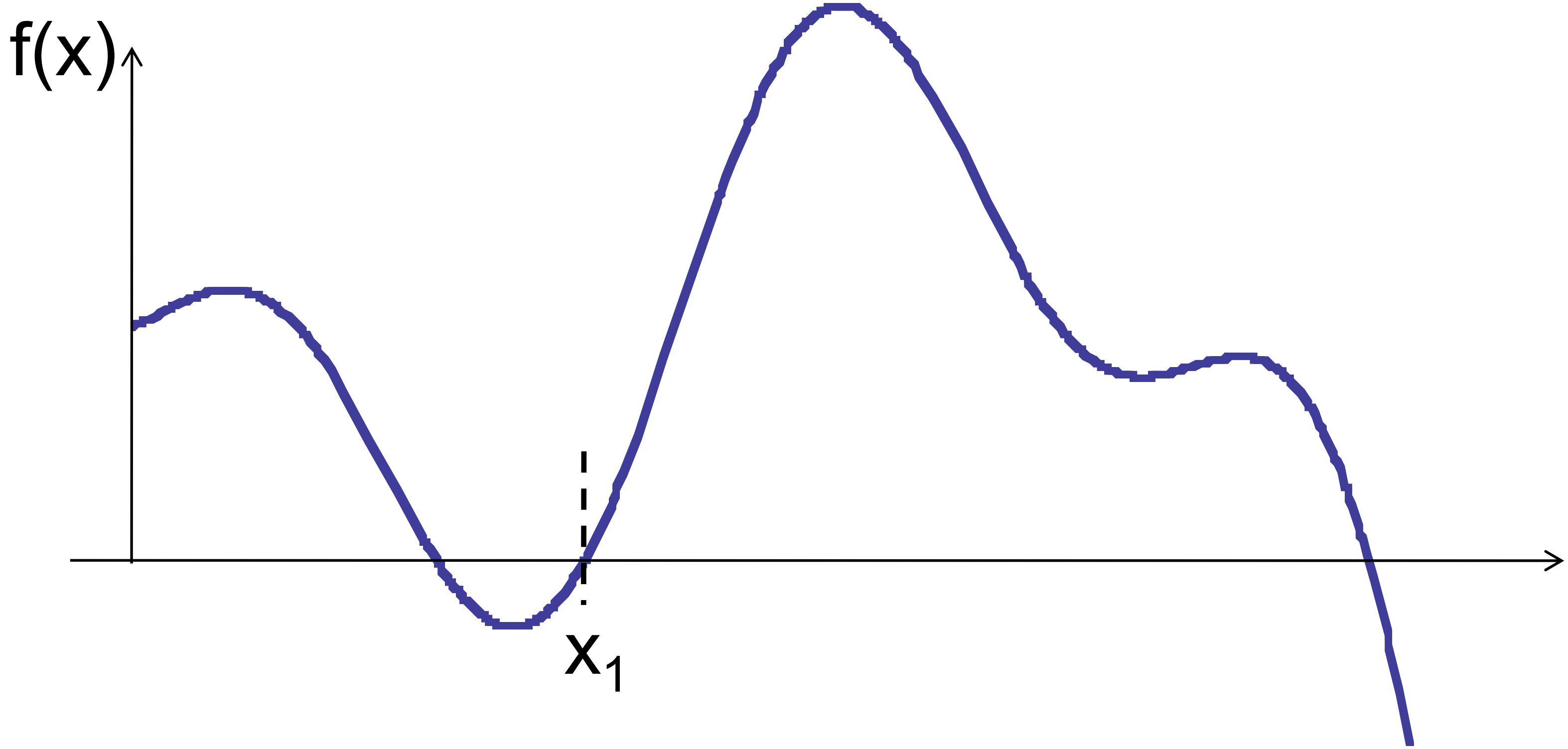
A) a_0 é +, a_1 é +

B) a_0 é +, a_1 é –

C) a_0 é -, a_1 é +

D) a_0 é -, a_1 é –

E) nenhum destes (um deles é 0)



Se expandimos f(x) em série de Taylor em torno do ponto x_1, $f(x) = a_0 + a_1 (x-x_1) + a_2 (x-x_1)^2 + \ldots$

Quais vão ser o sinais de a_0 e a_1?

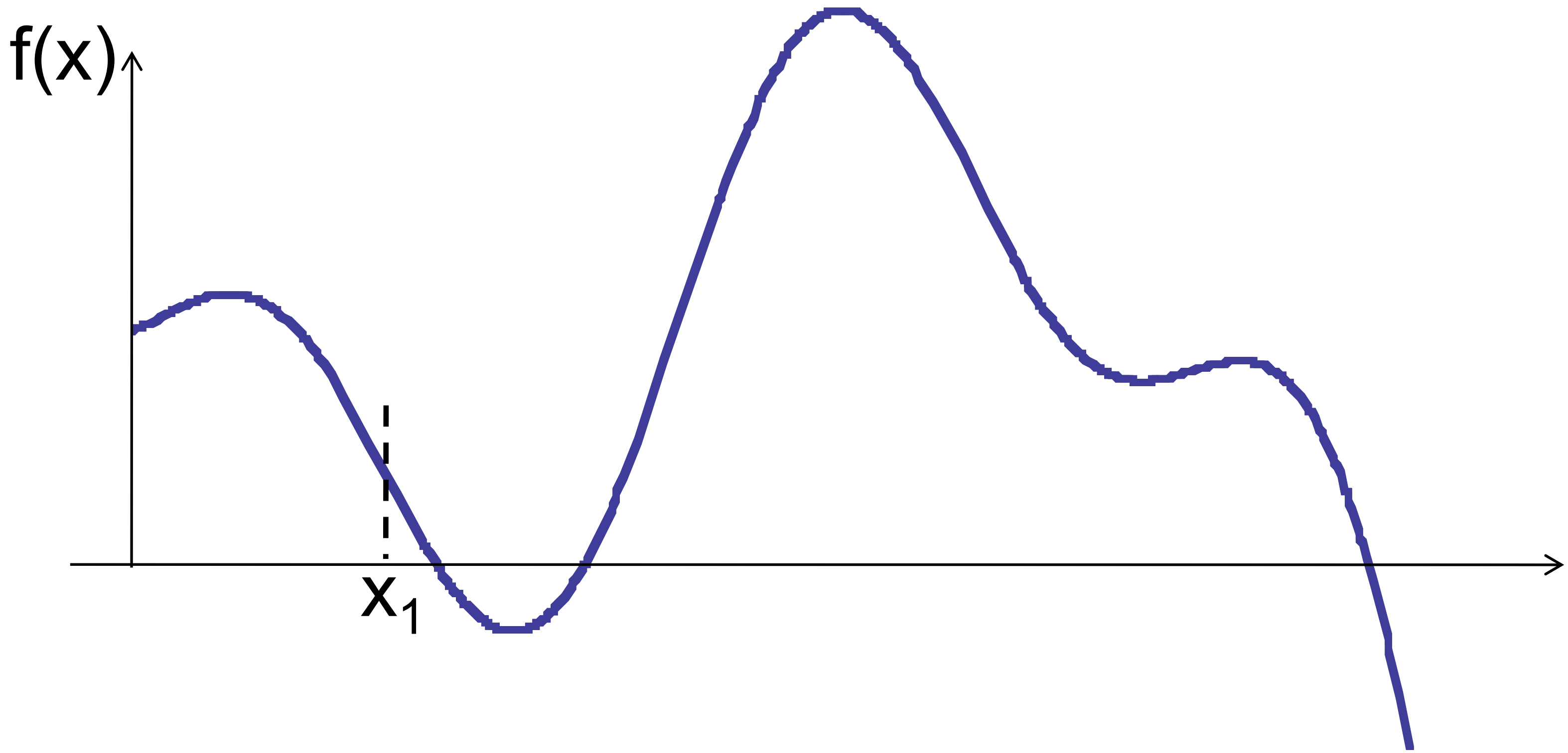
A) a_0 é +, a_1 é +

B) a_0 é +, a_1 é –

C) a_0 é -, a_1 é +

D) a_0 é -, a_1 é –

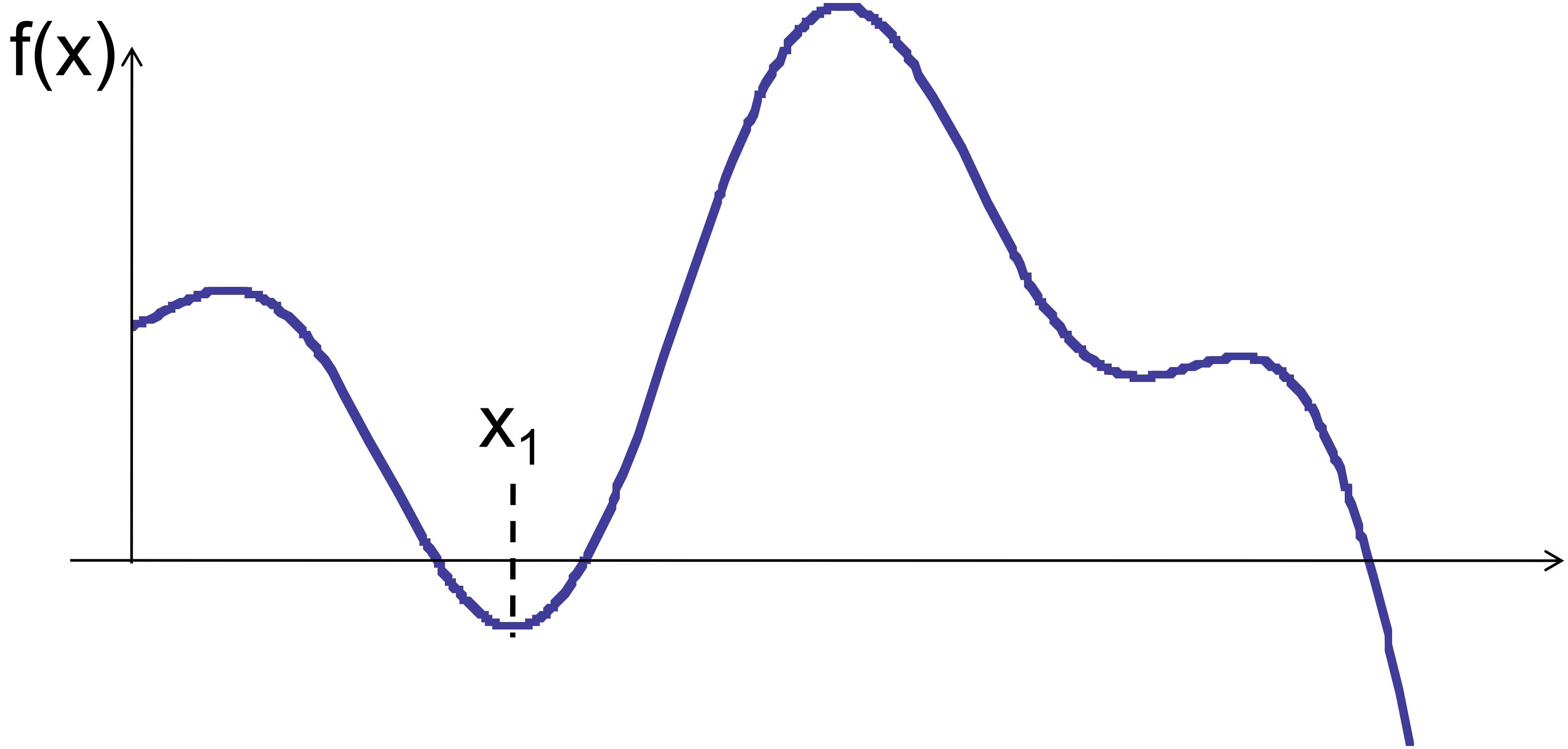
E) nenhum destes (um deles é 0)



Se expandimos f(x) em série de Taylor em torno do ponto x_1, $f(x) = a_0 + a_1 (x-x_1) + a_2 (x-x_1)^2 + \ldots$

Qual vai ser o sinal de a_2?

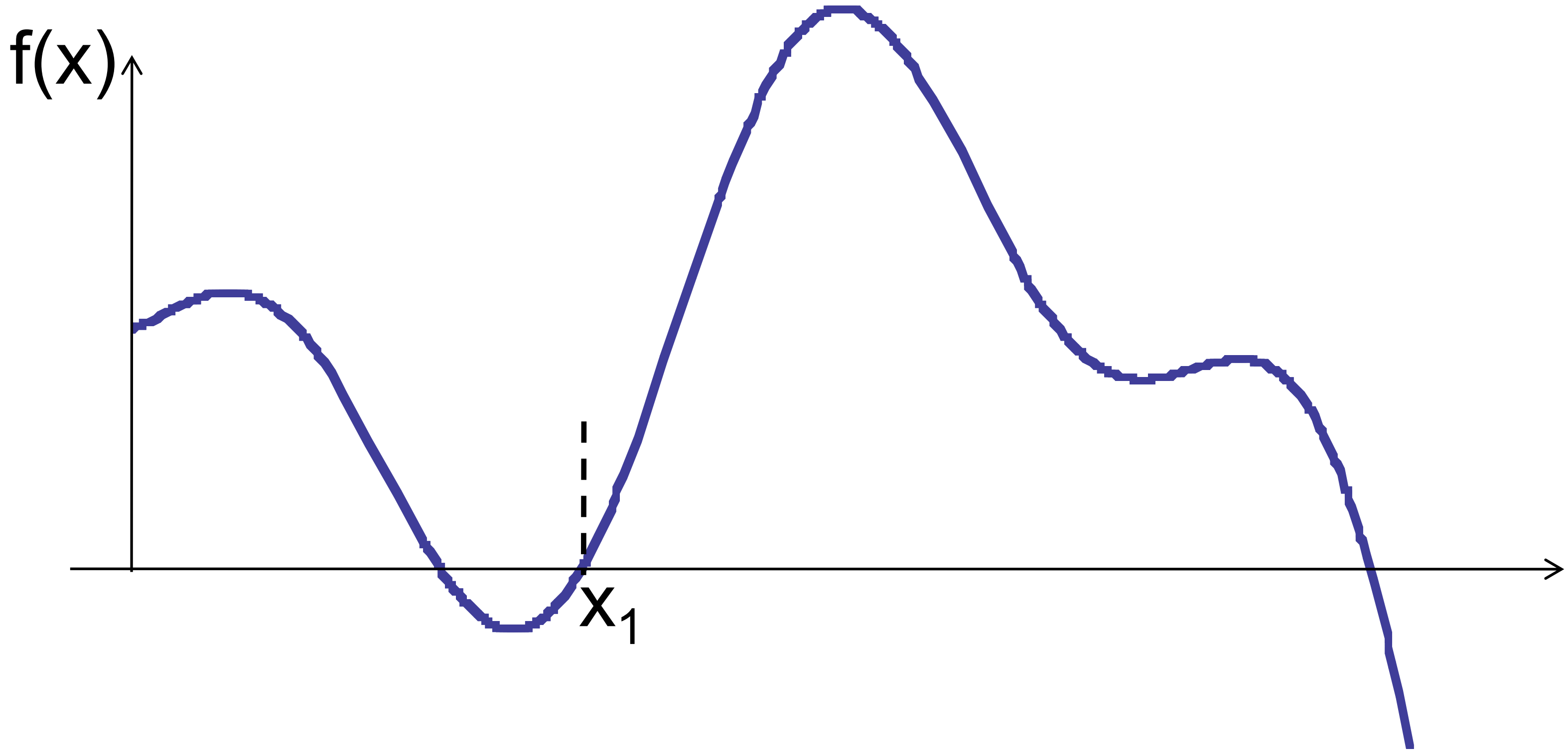
A) + B) - C) 0



Se expandimos f(x) em série de Taylor em torno do ponto x_1, $f(x) = a_0 + a_1 (x-x_1) + a_2 (x-x_1)^2 + \ldots$

Qual vai ser o sinal de a_2?

A) + B) - C) 0



Se expandimos f(x) em série de Taylor em torno do ponto x_1, $f(x) = a_0 + a_1 (x-x_1) + a_2 (x-x_1)^2 + ...$

Qual vai ser o sinal de a_2?

A) + B) - C) 0

A expansão em série de Taylor $\cos(\theta) = 1 - \theta^2/2! + \theta^4/4! + \ldots$ se aplica quando θ é medido em…

A) graus
B) radianos
C) qualquer um dos dois
D) nenhum dos dois

Quais são os primeiros termos da expansão em série de Taylor de e^x (em torno de x=0)?

A) $e^x = 1 + x^2/2! + x^4/4! + \ldots$

B) $e^x = 1 - x^2/2! + x^4/4! + \ldots$

C) $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \ldots$

D) $e^x = 1 - x + x^2/2! - x^3/3! + \ldots$

Quais os primeiros termos da expansão em série de Taylor de $\sqrt{1+x}$ se x é pequeno?

A) $1+\sqrt{x}+\ldots$

B) $1+\mathrm{x}+\ldots$

C) $1-\frac{1}{2}\mathrm{x}+\ldots$

D) $1+\frac{1}{2}\mathrm{x}+\ldots$

E) Something entirely different!

A força magnética sobre uma partícula (carga q, velocidade v) é $\mathbf{F} = q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.
Se $q>0$, $v(t=0) = +v_0\,\hat{\imath}$, e $B(x,y,z) = B_0\,\hat{\jmath}$,
como vai ser a trajetória da partícula?

A) circular no plano xy
B) circular no plano yz
C) circular no plano xz
D) helicoidal

Na questão anterior, suponha que v tenha uma componente na direção de **B** (ĵ), e uma componente perpendicular (î). Ela começa no plano y=0 e cruza o plano $y=y_{final}$ no instante T. Se você aumentar apenas a componente perpendicular inicial de v, o que vai acontecer com o "tempo de passagem" T?

A) T é independente de v_{perp}
B) T aumenta com v_{perp}
C) T diminui com v_{perp}

A força magnética sobre uma partícula (carga q, velocidade v) é $\mathbf{F} = q\, \mathbf{v} \times \mathbf{B}$.
Se $q>0$, $v(t=0) = +v_0\ \hat{\imath}$, e $B(x,y,z) = B_0\ \hat{\imath}$,
como vai ser a trajetória da partícula?

A) uma linha reta
B) circular no plano yz
C) circular no plano xz
D) helicoidal