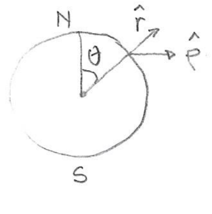
GABARITO

MECÂNICA GERAL - 2/2018

TESTE 7 —14/11/2018

NOME:

4. (8 pontos) Num certo planeta girante, que é perfeitamente esférico e tem raio R, a aceleração de queda livre tem módulo g_0 no polo norte e λg_0 no equador, onde $0 \leq \lambda \leq 1$. Encontre $g(\theta)$, o módulo da aceleração de queda livre na colatitude θ, como função da colatitude θ e em termos de λ. Dados: $\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \Omega^2 R \,\mathrm{sen}\,\theta\, \hat{\boldsymbol{\rho}}$; $\mathbf{g}_0 = -g_0 \hat{\mathbf{r}}$; $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}} = \mathrm{sen}\,\theta$.



No equador tem-se $\theta = \pi/2$ e $\hat r = \hat\rho$, de modo que

$$\vec g = -g_0 \hat r + \Omega^2 R \hat r = -(g_0 - \Omega^2 R)\hat r \Longrightarrow g = g_0 - \Omega^2 R.$$

Como, no equador, $g = \lambda g_0$, segue-se que

$$g_0 - \Omega^2 R = \lambda g_0 \Longrightarrow \Omega^2 R = (1-\lambda) g_0.$$

Portanto,

$$\vec g = \vec g_0 + (1-\lambda) g_0 \,\mathrm{sen}\,\theta\, \hat\rho \Longrightarrow \vec g \cdot \vec g = g_0^2 + (1-\lambda)^2 g_0^2 \,\mathrm{sen}^2\theta + 2(1-\lambda) g_0 \,\mathrm{sen}\,\theta\, \vec g_0 \cdot \hat\rho,$$

donde

$$g^2 = \vec g \cdot \vec g = g_0^2 + (1-\lambda)^2 g_0^2 \,\mathrm{sen}^2\theta + 2(1-\lambda) g_0 \,\mathrm{sen}\,\theta\, (-g_0 \hat r \cdot \hat\rho)$$

$$= g_0^2 \left[1 + (1 - 2\lambda + \lambda^2)\,\mathrm{sen}^2\theta - 2(1-\lambda)\,\mathrm{sen}^2\theta \right]$$

$$= g_0^2 \left[1 + (1 - \cancel{2\lambda} + \lambda^2 - 2 + \cancel{2\lambda})\,\mathrm{sen}^2\theta \right] = g_0^2 \left[1 + (\lambda^2 - 1)\,\mathrm{sen}^2\theta \right].$$

Isto é o mesmo que

$$g^2 = g_0^2 \left[1 - \mathrm{sen}^2\theta + \lambda^2 \,\mathrm{sen}^2\theta \right] \Longrightarrow g = g_0 \sqrt{\cos^2\theta + \lambda^2 \,\mathrm{sen}^2\theta}.$$

5. (2 pontos) Considere um objeto que se move sem atrito sobre uma mesa horizontal que gira em torno de um eixo vertical com velocidade angular $\boldsymbol{\Omega}$. Escreva as equações de movimento para as coordenadas x e y do objeto no referencial da mesa. Dado: $m\ddot{\mathbf{r}} = 2m\mathbf{v} \times \vec\Omega + m(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \times \boldsymbol{\Omega}$.

$\hat x \times \hat y = \hat z$

$\hat z \times \hat x = \hat y$

$\hat y \times \hat z = \hat x$

Como $\vec\Omega = \Omega \hat z$, $\vec r = x \hat x + y \hat y$ e $\dot{\vec r} = \dot x \hat y + \dot y \hat y$, temos

$$\cancel{m}\ddot{\vec r} = 2\cancel{m}(\dot x \hat x + \dot y \hat y) \times \hat z \Omega + \cancel{m}\left[\Omega \hat z \times (x \hat x + y \hat y) \right] \times \hat z \Omega$$

Portanto,

$$\ddot{\vec r} = 2\Omega \left[\dot x (-\hat y) + \dot y \hat x \right] + \Omega^2 (x \hat y - y \hat x) \times \hat z$$

$$= 2\Omega (\dot y \hat x - \dot x \hat y) + \Omega^2 (x \hat x + y \hat y)$$

Igualando os componentes de $\ddot{\vec r} = \ddot x \hat x + \ddot y \hat y$ em ambos os membros desta última equação, resulta

$$\ddot x = 2\Omega \dot y + \Omega^2 x,$$

$$\ddot y = -2\Omega \dot x + \Omega^2 y.$$