GABARITO

MECÂNICA GERAL - 2/2018

TESTE 6 —05/11/2018

NOME:

Considere uma partícula de massa m sujeita à força central $\mathbf{F} = -\dfrac{dU}{dr}\hat{\mathbf{r}}$ e defina a função $G = \mathbf{r}\cdot\mathbf{p}$ onde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$.

(a) **(2,5 pontos)** Exprima a derivada temporal de G em termos da energia cinética T e da força $\mathbf{F}$.

(b) **(2,5 pontos)** Integrando desde 0 até um instante arbitrário τ, demonstre que

$$\frac{G(\tau) - G(0)}{\tau} = 2\langle T\rangle + \langle \mathbf{F}\cdot\mathbf{r}\rangle,$$

onde o valor médio de uma função $f(t)$ no intervalo $(0,\tau)$ é definido por $\langle f\rangle = (1/\tau)\int_0^\tau f(t)dt$.

(c) **(2,5 pontos)** Explique por que, se a órbita da partícula é limitada (isto é, se $r_{min} \le r \le r_{max}$) e se fizermos τ suficientemente grande, podemos tornar o primeiro membro desta equação arbitrariamente pequeno. Isto é, o primeiro membro vai a zero quando $\tau \to \infty$.

(d) **(2,5 pontos)** Use a conclusão do item anterior para provar um resultado conhecido como **teorema do virial**: se $\mathbf{F}$ provém de uma energia potencial $U = kr^n$, então $\langle T\rangle = n\langle U\rangle/2$, onde agora $\langle f\rangle$ denota a média temporal de uma função $f(t)$ tomada sobre o intervalo $(0,\infty)$, isto é, $\langle f\rangle = \lim_{\tau\to\infty}(1/\tau)\int_0^\tau f(t)dt$.

(a) Se $G = \vec{r}\cdot\vec{p}$ temos

$$\frac{dG}{dt} = \dot{\vec{r}}\cdot\vec{p} + \vec{r}\cdot\dot{\vec{p}} = \vec{v}\cdot(m\vec{v}) + \vec{r}\cdot\vec{F} = m\vec{v}\cdot\vec{v} + \vec{r}\cdot\vec{F} = mv^2 + \vec{r}\cdot\vec{F}$$

porque, pela 2ª lei de Newton, $d\vec{p}/dt = \vec{F}$. Como $T = \frac{m}{2}v^2$, temos

$$\frac{dG}{dt} = 2T + \vec{r}\cdot\vec{F}.$$

(b) Integrando de 0 a τ e dividindo por τ, resulta

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{dG}{dt}dt = 2\frac{1}{\tau}\int_0^\tau T dt + \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \vec{r}\cdot\vec{F}dt \Rightarrow \frac{G(\tau)-G(0)}{\tau} = 2\langle T\rangle + \langle \vec{r}\cdot\vec{F}\rangle.$$

(c) Se a órbita é limitada, como a energia se conserva,

$$T + U = E \Rightarrow \frac{mv^2}{2} + U(r) = E = c^{te}.$$

Como $U(r)$ é limitada para $r_{min} \le r \le r_{max}$, v também é limitada. Logo, a função $G = \vec{r}\cdot\vec{p}$ é limitada porque r e $p = mv$ são limitados. Passando ao limite $\tau\to\infty$, o numerador $G(\tau)-G(0)$ é limitado mas o denominador τ cresce indefinidamente. Logo, a fração $(G(\tau)-G(0))/\tau$ tende a zero.

(d) Portanto, passando ao limite $\tau\to\infty$ obtém-se

$$2\langle T\rangle + \langle \vec{r}\cdot\vec{F}\rangle = 0.$$

Com $U = kr^n$ temos $\vec{F} = -knr^{n-1}\hat{r} \Rightarrow \vec{r}\cdot\vec{F} = r\hat{r}\cdot\vec{F} = r(-knr^{n-1}) = -nkr^n$.

Portanto,

$$2\langle T\rangle - n\langle kr^n\rangle = 0 \Rightarrow \langle T\rangle = \frac{n}{2}\langle U\rangle.$$