GABARITO

MECÂNICA GERAL - 2/2018

PROVA 2 — 31/10/2018

PROFESSOR: NIVALDO A. LEMOS

NOME:

A PROVA É COMPOSTA POR TRÊS QUESTÕES

Questão 1. Um oscilador criticamente amortecido, de frequência natural ω_0, entra em movimento com $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = v_0 > 0$.
(a) **(2,0 pontos)** Determine $x(t)$.
(b) **(1,0 ponto)** Esboce um gráfico de x como função do tempo.

(a) A solução geral da equação de movimento de um oscilador criticamente amortecido é

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{-\beta t}, \qquad \beta = \omega_0 .$$

A condição inicial $x(0) = 0$ dá $C_1 = 0$. Portanto,

$$x(t) = C_2 t\, e^{-\beta t},$$

donde

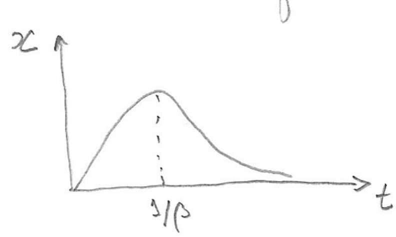
$$\dot{x}(t) = C_2 e^{-\beta t} + C_2 t(-\beta e^{-\beta t}).$$

A condição inicial $\dot{x}(0) = v_0$ conduz a $C_2 = v_0$, de modo que

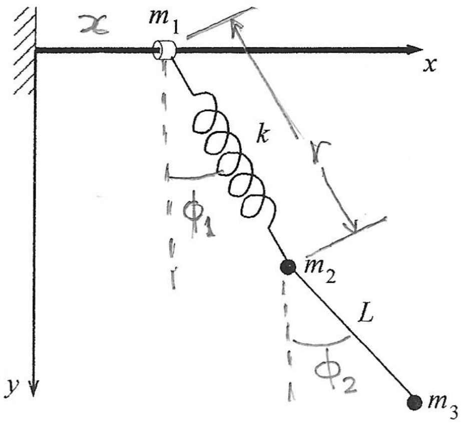
$$x(t) = v_0 t\, e^{-\beta t}$$

(b) Como $x(t) \geq 0 \ \forall t \geq 0$, $x(0) = 0$ e $\lim_{t\to\infty} t e^{-\beta t} = 0$, o gráfico é da seguinte forma:

Resta determinar quantos pontos críticos existem. De $\dot{x}(t) = 0$ conclui-se que $e^{-\beta t} - \beta t e^{-\beta t} = 0 \Rightarrow t = 1/\beta$. Há somente um ponto crítico que só pode ser um ponto de máximo.



Questão 2. O sistema mecânico representado na figura abaixo está restrito a um plano vertical fixo. A massa m_1 desliza sem atrito ao longo da haste horizontal rígida presa a uma parede. As masssas m_1 e m_2 estão conectadas por uma mola de constante elástica k e comprimento natural ℓ, ao passo que as massas m_2 e m_3 estão ligadas por um fio inextensível de comprimento L e massa desprezível.
(a) **(1,0 ponto)** Em termos das coordenadas cartesianas (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) das massas m_1, m_2 e m_3, exprima os vínculos a que o sistema está sujeito.
(b) **(1,0 ponto)** Quantos graus de liberdade o sistema possui?
(c) **(1,0 ponto)** Indique, e represente na figura, possíveis coordenadas generalizadas para descrever o movimento do sistema pelo formalismo lagrangiano.



(a) Como m_1 só se move ao longo do eixo x,

$$y_1 = 0.$$

Como a distância entre m_3 e m_2 é sempre igual a L,

$$(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 = L^2.$$

(b) Há 6 coordenadas sujeitas a duas equações de vínculo, logo o sistema tem 4 graus de liberdade.

(c) Possíveis coordenadas generalizadas são as coordenadas x, ϕ_1, r, ϕ_2 indicadas na figura.

Questão 3. Considere a chamada máquina de Atwood oscilante, em que M só se move verticalmente e movimento de m está restrito ao plano vertical representado na figura. A distância entre as duas polias é D e o comprimento do fio que conecta m e M é L. O raio de cada uma das polias é desprezível e não há atrito de espécie alguma.

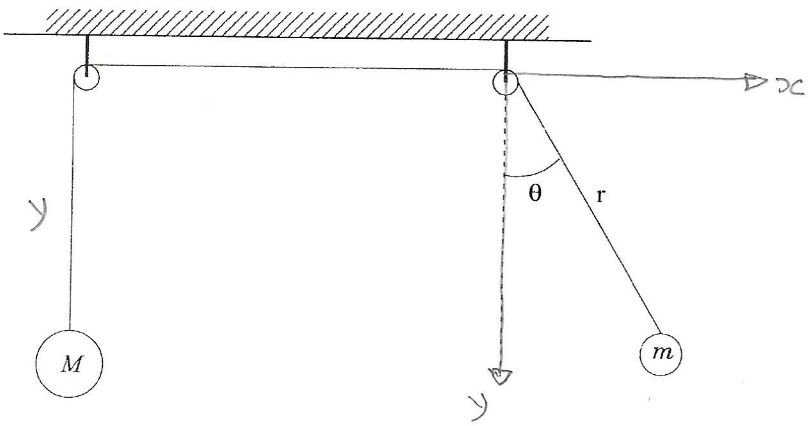
(a) **(2,0 pontos)** Usando as coordenadas generalizadas r e θ indicadas na figura, mostre que a lagrangiana do sistema é

$$\mathscr{L} = \frac{m+M}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2 - gr(M - m\cos\theta),$$

onde foi ignorada uma constante que não afeta as equações de movimento.

(b) **(1,0 ponto)** Escreva as equações de Lagrange.

(c) **(1,0 ponto)** Considere separadamente os limites $M \to \infty$ e $m \to 0$. A equação de movimento para r se reduz ao que seria de se esperar em cada caso? **Justifique sua resposta.**



(a) Com os eixos xy indicados na figura, temos

$$y + D + r = L \Rightarrow y = L - D - r \Rightarrow \dot{y} = -\dot{r}.$$

A energia cinética é

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{M}{2}\dot{y}^2 = \frac{m+M}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2,$$

ao passo que a energia potencial é

$$U = -Mgy - mgr\cos\theta = -Mg(L-D-r) - mgr\cos\theta = gr(M - m\cos\theta) - Mg(L-D).$$

Ignorando a constante $-Mg(L-D)$, resulta

$$\mathscr{L} = T - U = \frac{m+M}{2}\dot{r}^2 + \frac{m}{2}r^2\dot{\theta}^2 - gr(M - m\cos\theta).$$

(b) Equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{r}}\right) - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial r} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[(m+M)\dot{r}\right] - mr\dot{\theta}^2 + g(M - m\cos\theta) = 0$$

$$\Rightarrow (m+M)\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + g(M - m\cos\theta) = 0; \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) + mgr\,\text{sen}\,\theta = 0$$

$$\Rightarrow mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mgr\,\text{sen}\,\theta = 0. \quad (2)$$

(c) Dividindo a Eq.(1) por $m+M$ obtém-se

$$\ddot{r} - \frac{m}{m+M} r\dot{\theta}^2 + g\,\frac{M - m\cos\theta}{m+M} = 0.$$

Passando ao limite $M \to \infty$ resulta

$$\ddot{r} + g = 0 \implies \ddot{r} = -g.$$

Por outro lado, fazendo $m=0$ na Eq.(1) obtém-se

$$M\ddot{r} + gM = 0 \implies \ddot{r} = -g.$$

Em ambos os limites ($M \to \infty$ ou $m \to 0$), a massa M cairia livremente sob a ação da gravidade, isto é, $\ddot{y} = g$. Como $\ddot{r} = -\ddot{y}$, segue-se que $\ddot{r} = -g$. Portanto, a equação de movimento para r se reduz ao que seria de se esperar.