MECÂNICA GERAL - 2/2018

LISTA DE EXERCÍCIOS 12

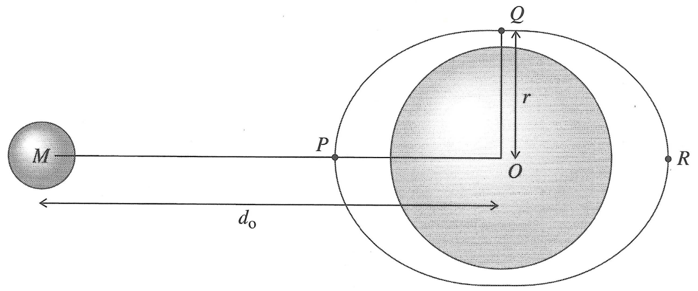
1. (a) Considere a força de maré

$$\mathbf{F}_{\text{maré}} = -GmM_L\left(\frac{\hat{\mathbf{d}}}{d^2} - \frac{\hat{\mathbf{d}}_0}{d_0^2}\right)$$

sobre um objeto de massa m na posição do ponto P da figura abaixo. Escreva $d = d_0 - R_T = d_0(1 - R_T/d_0)$ e use a aproximação binomial $(1-\epsilon)^{-2} \approx 1 + 2\epsilon$ para mostrar que

$$\mathbf{F}_{\text{maré}} \approx -(2GM_L mR_T/d_0^3)\hat{\mathbf{x}}.$$

Compare numericamente o módulo desta força com o da força gravitacional $m\mathbf{g}$ exercida pela Terra.
(b) Faça os mesmos cálculos aproximados para a força de maré no ponto R. Compare, em módulo, direção e sentido, esta força com a obtida no item (a).
(c) Faça os mesmos cálculos para a força de maré no ponto Q. (Neste caso, escreva $\hat{\mathbf{d}}/d^2 = \mathbf{d}/d^3$ e use a aproximação binomial na forma $(1+\epsilon)^{-3/2} \approx 1 - 3\epsilon/2$.)



2. A demonstração feita em aula da equação de movimento no referencial em rotação supôs que a velocidade angular deste referencial $\mathbf{\Omega}$ era constante. Mostre que, se $\dot{\mathbf{\Omega}} \neq 0$, será necessária a introdução de outra força inercial, algumas vezes chamada de *força de Euler*, igual a $m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{\Omega}}$.

3. (a) Um balde cheio de água é posto a girar em torno de um eixo vertical com velocidade angular Ω. Mostre que na situação de equilíbrio (em relação ao balde) a superfície da água é um parabolóide de revolução. Sugestão: use coordenadas cilíndricas e lembre-se de que a superfície da água é uma equipotencial sob a ação combinada das forças gravitacional e centrífuga. (b) Suponha que o balde seja um cilindro de raio R. Com o eixo z coincidente com o eixo de simetria do cilindro orientado para cima e o plano xy no nível horizontal em que a água originalmente se encontrava antes de o balde entrar em rotação, mostre que a equação da superfície da água no balde girante é

$$z = \frac{\Omega^2}{4g}(2\rho^2 - R^2).$$

Sugestão: o volume de água acima do nível original deve ser igual ao volume que ficou sem água abaixo do nível original.
(c) Determine a profundidade máxima e a altura máxima que a água alcança em relação ao seu ní horizontal original.

(CONTINUA NO VERSO)

4. Num certo planeta, que é perfeitamente esférico, a aceleração de queda livre tem módulo g_0 no polo norte e λg_0 no equador, onde $0 \leq \lambda \leq 1$. Encontre $g(\theta)$, o módulo da aceleração de queda livre na colatitude θ, como função de θ. Sugestão: Taylor, Eq. (9.44).

5. Considere um objeto que se move sem atrito sobre uma mesa horizontal que gira em torno de um eixo vertical com velocidade angular $\mathbf{\Omega}$.
(a) Escreva as equações de movimento para as coordenadas x e y do objeto no referencial da mesa. (Inclua as forças centrífuga e de Coriolis, mas ignore a rotação da Terra.)
(b) Resolva as duas equações com a ajuda dos números complexos, como mostrado em aula. Escreva a solução geral.
(c) No instante $t = 0$ o objeto está na posição $\vec{r}_0 = (x_0, 0)$ com velocidade $\vec{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0})$ (medidas no referencial da mesa). Mostre que, num instante genérico t,

$$x(t) = (x_0 + v_{x0}t)\cos\Omega t + (v_{y0} + \Omega x_0)t \operatorname{sen}\Omega t$$

e

$$y(t) = -(x_0 + v_{x0}t)\operatorname{sen}\Omega t + (v_{y0} + \Omega x_0)t\cos\Omega t.$$

(d) Descreva e esboce o comportamento do objeto para valores grandes de t. (Sugestão: Quando t é grande, os termos proporcionais a t dominam - exceto quando seus coeficientes são nulos, o que não é o caso aqui. Por isso, podemos escrever a solução na forma $x(t) = t(B_1 \cos\Omega t + B_2 \operatorname{sen}\Omega t)$ e uma expressão similar para $y(t)$. Agora combine o seno e o cosseno num único cosseno - ou seno, no caso de $y(t)$. Agora deve ficar mais fácil reconhecer que a trajetória é um tipo de espiral - mostre isso!)