MECÂNICA GERAL - 2/2018

LISTA DE EXERCÍCIOS 11

1. (a) Analise a energia potencial efetiva obtida para o problema de dois corpos sob a ação da força gravitacional [Taylor, Eq. (8.32)] e determine o raio da órbita circular possível para um planeta (ou cometa) de momento angular ℓ. (Sugestão: olhe para dU_{ef}/dr.)
(b) Mostre que esta órbita circular é estável, isto é, qualquer pequena perturbação radial provocará apenas pequenas oscilações radiais (olhe para d^2U_{ef}/dr^2.) Mostre que o período dessas pequenas oscilações é igual ao período orbital do planeta.

2. No problema 5 da Lista 5 você tomou contato com o **teorema do virial** para uma partícula em órbita circular sob a ação de uma força central com energia potencial da forma $U = kr^n$. Vamos agora demonstrar uma forma mais geral deste teorema que se aplica a uma partícula em qualquer órbita limitada.
(a) Determine a derivada temporal da quantidade $G = \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}$ e, integrando desde 0 até um instante arbitrário τ, demonstre que

$$\frac{G(\tau) - G(0)}{\tau} = 2\langle T \rangle + \langle \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} \rangle$$

onde $\mathbf{F}$ é a força resultante sobre a partícula e $\langle f \rangle$ denota a média temporal da função $f(t)$ no intervalo $(0, \tau)$.
(b) Explique por que, se a órbita da partícula é limitada e se fizermos τ suficientemente grande, podemos tornar o primeiro membro desta equação arbitrariamente pequeno. Isto é, o o primeiro membro vai a zero quando $\tau \to \infty$.
(c) Use este resultado para provar que, se $\mathbf{F}$ provém de uma energia potencial $U = kr^n$, então $\langle T \rangle = n\langle U \rangle/2$, onde agora $\langle f \rangle$ denota a média temporal de uma função $f(t)$ tomada sobre o intervalo $(0, \infty)$. Observação: se a função $f(t)$ é periódica, sua média em $(0, \infty)$ é igual à sua média num intervalo de tempo igual a um período.

3. Um satélite da Terra é observado em seu perigeu a uma altura de 250 km acima da superfície terrestre e com uma velocidade de 8500 m/s. Determine a excentricidade de sua órbita e sua altura acima da superfície terrestre no apogeu. O raio da Terra é $R_T \approx 6,4 \times 10^6$ m. Você também vai precisar do produto GM_T mas este é fácil de determinar se você lembrar que $GM_T/R_T^2 = g$.

4. O que aconteceria com a órbita da Terra (que podemos, para efeito deste problema, considerar como circular) se metade da massa do Sol subitamente desaparecesse? Nosso planeta continuaria ligado ao sistema solar se isso ocorresse? (Sugestões: considere o que aconteceria com as energias cinética e potencial da Terra no momento do cataclísmico desaparecimento. O teorema do virial — item (c) do Problema 2 acima — aplicado a órbitas circulares ajuda a responder a esta pergunta.) Trate o Sol — ou o que dele restar — como fixo.

5. (a) Pelo método do potencial efetivo, discuta os movimentos possíveis de uma partícula de massa m sujeita a uma força central atrativa inversamente proporcional ao cubo da distância ao centro de força, cuja componente radial é:

$$F(r) = -\frac{k}{r^3}, \qquad k > 0.$$

Encontre os intervalos de valores da energia e do módulo do momento angular para cada tipo de movimento.

(b) A equação orbital é

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} = -u - \frac{m}{\ell^2 u^2} F\Big(\frac{1}{u}\Big), \qquad u = \frac{1}{r}.$$

Mostre que as soluções desta equação podem ser postas numa das seguintes formas:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} &= \frac{1}{r_0} \cos\left[\beta(\phi - \phi_0)\right], & (1)\\
\frac{1}{r} &= \frac{1}{r_0} \cosh\left[\beta(\phi - \phi_0)\right], & (2)\\
\frac{1}{r} &= \frac{1}{r_0} \operatorname{senh}\left[\beta(\phi - \phi_0)\right], & (3)\\
\frac{1}{r} &= \frac{1}{r_0} e^{\pm\beta\phi}. & (4)\\
\frac{1}{r} &= \frac{1}{r_0} (\phi - \phi_0), . & (5)
\end{aligned}$$

(c) Exprima a constante β em termos de ℓ em cada caso.

(d) Faça um esboço de uma órbita de cada tipo.