MECÂNICA GERAL - 1/2019

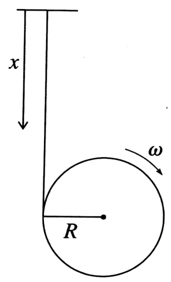
LISTA 10

1. Escreva a lagrangiana para um cilindro de massa m, raio R e momento de inércia I que rola sem deslizar sobre um plano inclinado de um ângulo α com relação à horizontal. Use a distância percorrida pelo cilindro a partir do ponto mais alto do plano (oriente um eixo x para baixo ao longo da rampa) como coordenada generalizada. Obtenha a equação de Lagrange e resolva-a para achar a aceleração do centro de massa do cilindro $\ddot{x}$. Lembre que $T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$, onde v é a velocidade do centro de massa do cilindro e ω é sua velocidade angular.

2. (a) Use o ângulo ϕ com a vertical como coordenada generalizada e escreva a lagrangiana para um pêndulo simples de comprimento l suspenso do teto de um elevador que acelera verticalmente para cima com aceleração constante a.

(b) Encontre a equação de movimento e mostre que ela é idêntica à obtida para um pêndulo usual exceto pelo fato de que g é agora substituído por $g+a$. Comente as possíveis implicações deste resultado.

3. A figura ao lado ilustra um modelo simplificado de um iôiô. Um barbante de massa desprezível é suspenso verticalmente de um ponto fixo enquanto sua outra extremidade é enrolada várias vezes em torno de um cilindro uniforme de massa me raio R. Quando o cilindro é abandonado do repouso, ele acelera para baixo, girando enquanto o barbante se desenrola.



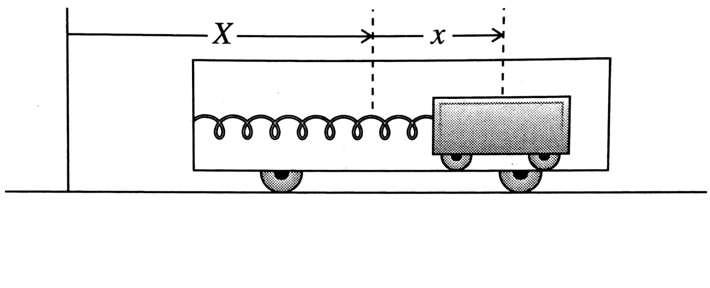
(a) Escreva a lagrangiana do cilindro usando a distância x como coordenada generalizada.

(b) Use a equação de Lagrange para obter a equação de movimento e mostre que o cilindro tem aceleração $\ddot{x} = 2g/3$ vertical para baixo. [*Dicas:* Lembre da disciplina de Física I onde você aprendeu que a energia cinética de um objeto como esse pode ser escrita na forma $T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$, onde v é a velocidade do seu centro de massa, I seu momento de inércia relativo a seu eixo geométrico e vale $I = \frac{1}{2}mR^2$ e ω Ee sua velocidade angular em relação a seu CM. Você pode exprimir ω em termos de $\cdot x$.]

4. Um carrinho de massa m se move sobre trilhos no interior de um carro maior a cuja parede está preso por uma mola de constante elástica k. Na posição relaxada da mola, os centros geométricos dos dois carros têm posições coincidentes sobre um eixo horizontal. Use o símbolo x para indicar a distância do carrinho a sua posição de equilíbrio e o símbolo X para a distância do carro maior até uma referência fixa no solo - veja a figura abaixo. O carro maior é agora obrigado a oscilar de modo que $X = Acos\omega t$, onde A e ω são constantes e t mede a passagem do tempo. Escreva a lagrangiana para o movimento do carrinho menor e mostre que sua equação de movimento tem a forma

$$\ddot{x} = \omega_0^2 x = Bcos\omega t,$$

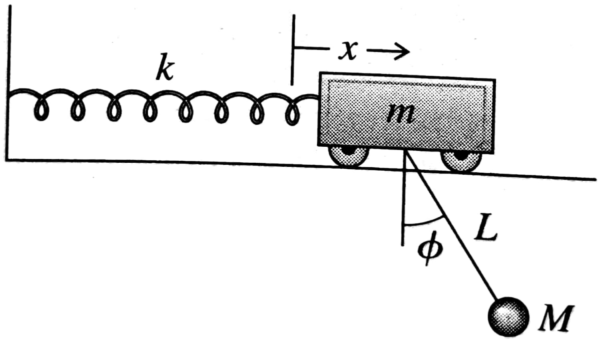
onde ω_0 é a frequência natural $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ e B é uma constante. Comente as implicações deste resultado.



5. Um pêndulo simples, de massa M e comprimento L, é suspenso de um carrinho que pode oscilar preso à extremidade de uma mola de constante elástica k, como mostra a figura abaixo.

(a) Escreva a lagrangiana em termos das coordenadas generalizadas x e ϕ, onde x é a distensão da mola a partir de sua posição relaxada.

(b) Encontre as equações de movimento para as duas coordenadas generalizadas.



6. Considere dois objetos de massas m_1 e m_2 que se movem num campo gravitacional uniforme $\vec{g}$ e interagem através de uma energia potencial $U(r)$.

(a) Mostre que a lagrangiana deste sistema pode ser decomposta em duas parcelas, uma ligada ao movimento do centro de massa (CM) do sistema e outra à posição relativa $\vec{r}$.

(b) Escreva as equações de Lagrange para as coordenadas do CM X, Y e Z e descreva o movimento do CM.

(c) Escreva as equações de Lagrange para as coordenadas relativas e mostre que o movimento de $\vec{r}$ é o mesmo que o de uma partícula de massa igual à massa reduzida μ, com posição $\vec{r}$ e energia potencial $U(r)$.