MECÂNICA GERAL - 1/2017

LISTA 8

1. Em um certo problema unidimensional, a energia potencial de uma massa m a uma distância x da origem é dada por

$$U(r) = U_0 \left(\frac{x}{R} + \lambda^2 \frac{R}{x} \right)$$

onde $0 < x < \infty$ e U_0, R e λ são constantes positivas.
(a) Encontre a posição de equilíbrio x_0.
(b) Chame de h a distância a partir do equilíbrio e use a expansão de Taylor de $U(x_0 + h)$ até segunda ordem para mostrar que, para pequenos valores de h, $U(h) = constante + 1/2kh^2$.
(c) Qual a frequência angular de pequenas oscilações deste sistema?

2. Uma mola de massa desprezível é suspensa do teto. Nesta posição, uma massa é presa a sua extremidade livre e abandonada a partir do repouso. O movimento é criticamente amortecido, e a posição final de repouso da massa está $0,5m$ abaixo da posição de onde ela foi abandonada. Qual a distancia a que ela se encontra desta posição final de equilíbrio $1s$ após ser abandonada?

3. Um oscilador sem amortecimento tem período $\tau_0 = 1s$. Quando sofre um amortecimento fraco, a amplitude de suas oscilações decresce para a metade em um período τ_1. Exprima β em função de ω_0, a frequência angular do oscilador sem amortecimento, e determine τ_1.

4. Um sistema massa-mola, de frequência natural ω_0, é submetido a duas experiências de relaxação semelhantes em meios viscosos diferentes. A experiência consiste em puxar a mola até que tenha uma deformação x_0 e então soltá-la e acompanhar o movimento resultante. Um dos meios (1) promove amortecimento crítico e o outro (2) produz uma força de arrasto com coeficiente duas vezes maior que o primeiro.
(a) Escreva a solução completa do problema nos dois casos.
(b) Determine, como função do tempo, a razão entre as velocidades atingidas pelo sistema nas duas experiências $v_1(t)/v_2(t)$. Analise o valor desta razão para pequenos valores de t até segunda ordem e determine se ela é maior ou menor que 1 neste caso.

5. De um modo geral, o integrando $f(y, y', x)$ cuja integral queremos minimizar depende de y, y' e x. Quando f é independente de uma destas variáveis, o problema pode se simplificar bastante. Nestes casos, podemos encontrar com facilidade uma constante de movimento, chamada neste contexto de uma **primeira integral** das equações de Euler-Lagrange. Esta primeira integral reduz o problema, que em geral é traduzido por uma equação diferencial de 2^a ordem, numa equação de 1^a ordem, mais fácil de resolver.
(a) Suponha que $f = f(y', x)$ não dependa de y. Prove que, neste caso, a equação de Euler-Lagrange se reduz a

$$\partial f / \partial y' = constante$$

Na mecânica Lagrangeana, veremos que esta simplificação ocorre sempre que uma componente do momento se conserva.
(b) Suponha agora que $f = f(y, y')$ não dependa da variável independente x. Prove que, neste caso,

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y''.$$

Em seguida, use a equação de Euler-Lagrange para substituir $\partial f/\partial y$ do lado direito e mostre portanto que

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left(y' \frac{\partial f}{\partial y'}\right).$$

Prove que este resultado nos dá imediatamente uma primeira integral dada por

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = constante.$$

Este resultado pode simplificar muitos cálculos. Na mecânica Lagrangeana, onde a variável independente é o tempo t, o resultado correspondente a este é que, se a função Lagrangeana for independente de t, então a energia é conservada.