<u>Tutorial:</u> Órbitas Fechadas, Energia, e Momento Angular

Neste capítulo, estudamos o movimento orbital sob a influência de um potencial da forma $1/r$. Os resultados que obtivemos são bastante gerais, mas muitas vezes vamos estar mais interessados no caso de um objeto de pequena massa orbitando outro de massa muito maior sob a ação exclusiva da interação gravitacional. Neste caso, a equação da órbita e a velocidade orbital podem ser escritas na forma:

$$r(\phi) = \frac{c}{1+\epsilon\cos\phi} \tag{1}$$

$$v(r) = \sqrt{GM(\frac{2}{r} - \frac{1}{a})} \tag{2}$$

Como vimos em aula, a equação da órbita implica em relações entre os parâmetros geométricos da órbita e algumas quantidades dinâmicas importantes:

$$E = -\frac{GMm}{2a} \tag{3}$$

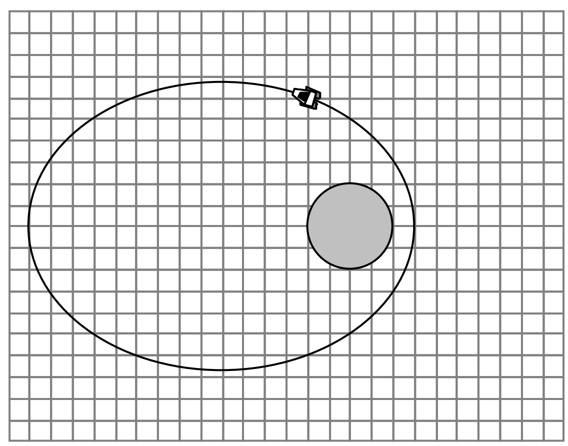
$$L_z = \mu\sqrt{GMc} \tag{4}$$

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3 \tag{5}$$

onde $a = (r_{\text{min}} + r_{\text{max}})/2$ é o semi-eixo maior da órbita.

I. Comparação entre órbitas circulares e elípticas

Imagine que você esteja pilotando uma espaçonave em torno de um planeta desconhecido. Você leva sua espaçonave até uma órbita elíptica, como mostra a figura à direita. A distância entre sua espaçonave e o centro de massa do sistema espaçonave-planeta (tomado neste caso como coincidente com o centro do planeta) varia de um valor mínimo de 3 unidades até um máximo de 15 unidades.



A. Qual é o raio da *órbita circular* na qual o sistema espaçonave-planeta teria a <u>mesma energia total</u> que na órbita elíptica? Desenhe com cuidado esta órbita no diagrama.

Considere agora um ponto onde as duas órbitas se interceptam.

B. Sobre qual das duas órbitas a espaçonave passará por estes ponto de interseção com *maior* rapidez?

C. Sobre qual das duas a espaçonave passará por estes pontos de interseção com *maior* momento angular (em módulo)? Justifique sua resposta usando dois raciocínios distintos:

- Usando a conexão entre o momento angular e os parâmetros geométricos das órbitas;

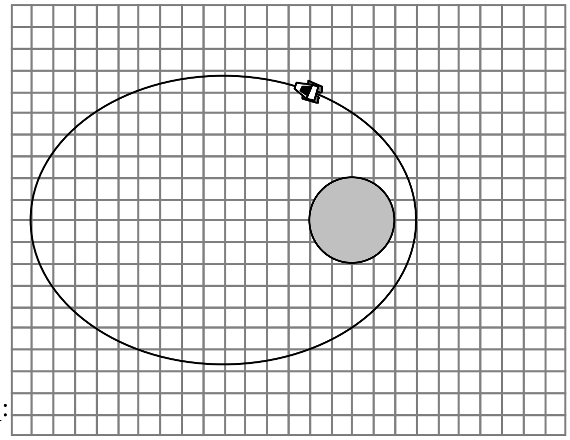
- Usando a definição $L_z = |\vec{r} \times \vec{p}|$ e sua resposta ao item B.

D. [Discussão] Neste capítulo, nós deduzimos a expressão para a energia orbital E usando apenas as equações para $r(\phi)$ e $v(r)$ no ponto r_{min}. É possível fazer-se a mesma dedução para L_z?

PARE AQUI e confira suas respostas com o instrutor!
(espaço para rascunho abaixo)

II. Comparação entre as órbitas, continuação

A. Determine agora o raio da órbita circular que a espaçonave teria que percorrer para ter o mesmo momento angular que na órbita elíptica, e represente a órbita circular no diagrama.



B. Considere agora o ponto onde estas duas órbitas se interceptam. Sobre qual das duas a espaçonave passará por este ponto de interseção com *maior* rapidez? Outra vez, justifique sua resposta usando dois raciocínios distintos:

- Usando seu conhecimento sobre o momento angular em cada uma das duas órbitas, e

- Usando seu conhecimento sobre a energia total em cada órbita.

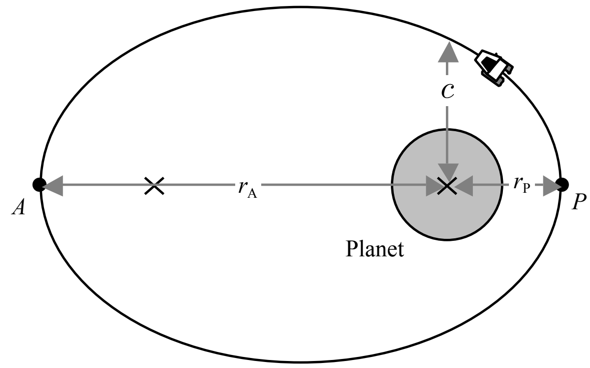
C. Quais são a excentricidade ϵ e o fator de escala c da órbita elíptica?

D. [Discussão] Qual das órbitas discutidas nesta página tem menor período, a órbita elíptica ou a circular? Se duas espaçonaves iniciam seus movimentos sobre cada uma destas órbitas simultaneamente a partir de $\phi = 0$, quantas vezes uma vai ultrapassar a outra até que a mais lenta retorne ao ponto onde $\phi = 0$?

PARE AQUI e confira suas respostas com o instrutor!

III. Transferência de uma órbita elíptica para uma circular

Outro diagrama da órbita de sua espaçonave está representado à direita. Os focos da órbita (indicados por um "x"), as distâncias de periapse r_P, e de apoapse r_A, além do fator de escala c, estão indicados no diagrama.



Polar view of orbit *(not to scale)*

A. Você quer transferir sua espaçonave desta órbita elíptica para outra circular. Para gastar menos combustível, você quer fazer isto disparando o propulsor de sua espaçonave *uma única vez* (para frente ou em reverso).

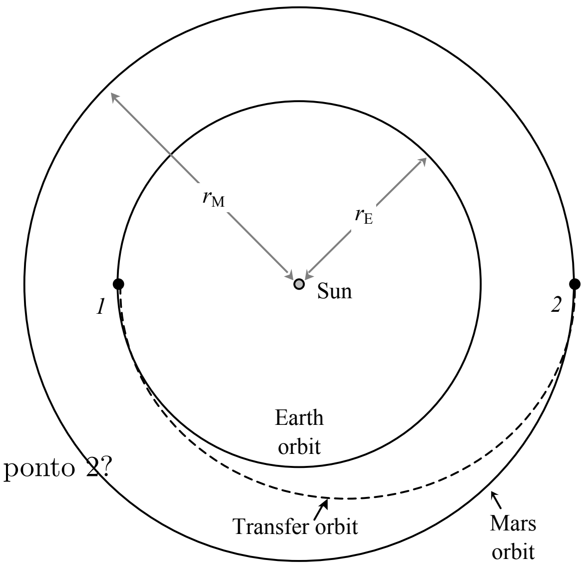
Para se transferir para uma órbita circular de raio r_A, a partir do apoapse (ponto A), você precisa *aumentar* ou *diminuir* a rapidez de sua espaçonave ao passar pelo ponto A? Justifique sua resposta usando dois raciocínios distintos:

1. Baseando-se no momento angular;

2. Baseando-se na energia total das órbitas.

B. Como mudaria sua resposta ao item A se você quizesse se transferir para uma órbita circular de raio r_P a partir do periapse (ponto P)? Explique seua raciocínio.

IV. Aplicação: a órbita de trasferência de Hohmann



Órbitas de transferência elípticas, como aquela mostrada no trajeto entre a Terra e Marte, se constituem na maneira energeticamente mais eficiente de se enviar sondas espaciais entre dois objetos, ambos em órbita do Sol sobre o mesmo plano. Estas orbitas são chamadas de *órbitas de transferência de Hohmann* em homenagem a Walter Hohmann, que propôs esta solução em 1925.

A. Descreva *qualitativamente* as manobras necessárias para que a sonda espacial entre e saia da órbita de transferência. Em particular, a sonda deve *aumentar sua rapidez* ou *diminuir sua rapidez* no ponto 1? E no ponto 2?

PARE AQUI e confira suas respostas com o instrutor!

B. [desafio!] Determine o fator de escala c e a excentricidade ϵ da órbita de transferência. Use unidades astronômicas (UA) - o raio orbital da Terra tem 1 UA, por definição. O raio orbital de Marte é aproximadamente 1.5 UA.

C. [desafio!] Quanto tempo a sonda vai passar na órbita de transferência, em anos terrestres? (Dica: qual a duração de uma órbita elíptica completa ao longo da órbita de transferência?)