MECÂNICA GERAL - 1/2018

LISTA 11

1. Considere o problema bem conhecido de um carrinho de massa m que se move sem atrito sobre o eixo x ligado à extremidade de uma mola de constante elástica k cuja outra extremidade está presa. Se desprezarmos a massa da mola, como sempre fazemos, sabemos que o carrinho vai executar um movimento harmônico simples (MHS) com frequência angular $\omega = \sqrt{k/m}$. Usando a formulação lagrangiana podemos levar em conta o efeito da massa M da mola da seguinte forma:
(a) Suponha que a massa da mola esteja uniformemente distribuída e que ela se distenda também uniformemente e prove que a energia cinética da mola é $\frac{1}{6}M\dot{x}^2$, onde x é a distensão da mola a partir de sua posição de equilíbrio. Escreva a lagrangiana do sistema. (A energia potencial continua sendo $\frac{1}{2}kx^2$).
(b) Escreva as equações de Lagrange e mostre que o carrinho executa MHS com frequência angular $\omega = \sqrt{k/(m + M/3)}$ - isto é, o efeito da massa M da mola é simplesmente somar $M/3$ à massa do carrinho.

2. (a) Analise a energia potencial efetiva obtida para o problema de dois corpos sob a ação de uma força central conservativa e determine o raio da órbita circular possível para um planeta (ou cometa) de momento angular ℓ. (Sugestão: olhe para dU_{ef}/dr.)
(b) Mostre que esta órbita circular é estável, no sentido que qualquer pequena perturbação radial provocará apenas pequenas oscilações radiais (olhe para d^2U_{ef}/dr^2.) Mostre que o período destas oscilações é igual ao período orbital do planeta.

3. No problema 4 da lista 7 você tomou contato com o **teorema do virial** para uma partícula em órbita circular sob a ação de uma força central com energia potencial da forma $U = kr^n$. Vamos agora demonstrar uma forma mais geral deste teorema que se aplica a uma partícula em qualquer órbita periódica.
(a) Determine a derivada temporal da quantidade $G = \vec{r} \cdot \vec{p}$ e, integrando desde 0 até um instante arbitrário t, demonstre que

$$\frac{G(t) - G(0)}{t} = 2 < T > + < \vec{F} \cdot \vec{r} >$$

onde $\vec{F}$ é a força resultante sobre a partícula e $< f >$ denota a média sobre o tempo da quantidade f.
(b) Explique porque, se a órbita da partícula é periódica e se fizermos t suficientemente grande, podemos fazer o lado esquerdo desta equação ser tão pequeno quanto queiramos. Isto é, o lado esquerdo vai a zero quando $t \to \infty$.
(c) Use este resultado para provar que, se $\vec{F}$ provém de uma energia potencial $U = kr^n$, então $< T >= n < U > /2$, se agora $< f >$ denota a média temporal tomada sobre um intervalo de tempo muito grande.

4. Um satélite da Terra é observado em seu perigeu a uma altura de $250km$ acima da superfície terrestre e com uma velocidade de $8500m/s$. Determine a excentricidade de sua órbita e sua altura acima da superfície terrestre no apogeu. O raio da Terra é $R_T \approx 6,4 \times 10^6 m$. Você também vai precisar do produto GM_T mas este é fácil de determinar se você lembrar que $GM_T/R_T^2 = g$.

5. O que aconteceria com a órbita da Terra (que podemos, para efeito deste problema, considerar como circular) se metade da massa do Sol subitamente desaparecesse? Nosso planeta continuaria ligado ao sistema solar se isso ocorresse? (Sugestões: considere o que aconteceria com as energias cinética e potencial da Terra no momento do cataclísmico desaparecimento. O teorema do virial para órbitas circulares - problema 4 da lista 7 - ajuda a responder a esta pergunta.) Trate o Sol - ou o que dele restar - como fixo.