MECÂNICA GERAL - 1/2018

LISTA 10

1. Considere um objeto de massa m que pode se mover em duas dimensões com uma energia potencial $U(x, y) = \frac{1}{2}kr^2$, onde $r^2 = x^2 + y^2$. Escreva a lagrangiana, usando as coordenadas x e y, e obtenha as equações de movimento de Lagrange. Descreva suas soluções. (Esta é a energia potencial de um íon numa "armadilha de íons", que pode ser usada para estudar as propriedades de íons atômicos individuais.)

2. Considere uma partícula de massa m que se move sobre um plano sem atrito, inclinado de um ângulo α com relação à horizontal. Escreva a lagrangiana em termos das coordenadas cartesianas x, horizontal, e y, orientada para baixo ao longo do plano. O sistema é bidimensional - as coordenadas x e y da partícula são independentes. Não esqueça de incluir a energia potencial gravitacional. Encontre as duas equações de Lagrange e mostre que elas são as que você deveria esperar.

3. Considere duas partículas se movendo sem vínculos em 3 dimensões, com energia potencial $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$.
(a) Escreva as seis equações de movimento obtidas pela aplicação da segunda lei de Newton a cada partícula.
(b) Escreva a lagrangiana $\mathcal{L}\ (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) = T - U$ e mostre que as seis equações de Lagrange são idênticas as equações newtonianas obtidas no item (a). Este resultado demonstra a validade das equações de Lagrange em coordenadas cartesianas, o que por sua vez demonstra o princípio de Hamilton. Como este último é independente do sistema de coordenadas, isto prova a validade das equações de Lagrange em qualquer sistema de coordenadas.

4. Escreva a lagrangiana para um cilindro de massa m, raio R e momento de inércia I que rola sem deslizar sobre um plano inclinado de um ângulo α com relação à horizontal. Use a distância percorrida pelo cilindro a partir do ponto mais alto do plano (oriente um eixo x para baixo ao longo da rampa) como coordenada generalizada. Obtenha a equação de Lagrange e resolva-a para achar a aceleração do centro de massa do cilindro $\ddot{x}$. Lembre que $T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$, onde v é a velocidade do centro de massa do cilindro e ω é sua velocidade angular.

5. Considere dois objetos de massas m_1 e m_2 que se movem num campo gravitacional uniforme $\vec{g}$ e interagem através de uma energia potencial $U(r)$.
(a) Mostre que a lagrangiana deste sistema pode ser decomposta em duas parcelas, uma ligada ao movimento do centro de massa (CM) do sistema e outra à posição relativa $\vec{r}$.
(b) Escreva as equações de Lagrange para as coordenadas do CM X, Y e Z e descreva o movimento do CM.
(c) Escreva as equações de Lagrange para as coordenadas relativas e mostre que o movimento de $\vec{r}$ é o mesmo que o de uma partícula de massa igual à massa reduzida μ, com posição $\vec{r}$ e energia potencial $U(r)$.