

Cap. 5 . Oscilações

Quase todos os sistemas físicos exibem oscilações quando sofrem pequenos deslocamentos de uma posição de equilíbrio estável. Se estes deslocamentos são pequenos, as oscilações são quase sempre do tipo chamado harmônico simples.

São também muito úteis - por exemplo, todo bom relógio depende de um oscilador. Os primeiros relógios confiáveis usavam um pêndulo; os primeiros relógios precisos (cruciais na navegação) usavam uma roda balançada oscilante; relógios modernos usam as oscilações de um cristal de quartzo; e os relógios + precisos de hoje usam oscilações de ~~uma~~ átomos. Neste capítulo vamos explorar a física e a matemática das oscilações.

Começaremos com oscilações harmônicas simples, depois oscilações amortecidas (que decaem e desaparecem pela presença de forças resistivas) e oscilações forçadas, que são mantidas por uma força externa, como em todos os relógios.

5.1 Lei de Hooke

Objeto massivo preso a uma extremidade de uma mola que obedeça à

Lei de Hooke executa oscilações harmônicas simples. Antes de ver a demonstração desta afirmação, pergunte-mo-nos porque a lei de Hooke é tão importante e aparece tão frequentemente.

Lei de Hooke: força exercida por mola (restrita a movimentos sobre o eixo x) é $F_x(x) = -kx$, x = deslocamento a partir do equilíbrio e k constante > 0 . Como $k > 0$, $x = 0$ é posição de equilíbrio estável (examine a força para $x > 0$ e $x < 0$). Esta é uma força restauradora (e linear).

Forma equivalente: $U(x) = \frac{1}{2} kx^2$

Considere agora sistema conservativo unidimensional com ponto de equilíbrio estável, que tomaremos como $x_0 = 0$, e o comportamento da $U(x)$ nas vizinhanças deste ponto através sua expansão em série de Taylor:

$$U(x) = U(0) + U'(0)x + \frac{1}{2}U''(0)x^2 + \dots$$

Se x é pequeno, podemos ignorar os demais termos; podemos também redefinir a referência de energia potencial para fazer $U(0) = 0$. Como $x_0 = 0$ é de equilíbrio, $U'(0) = 0$. Chamando $U''(0)$ de k , ficamos com

$U(x) = \frac{1}{2} kx^2$, para x suficientemente pequeno. (Lembre que,

como o equilíbrio em $x_0 = 0$ é estável, $U''(0) = k > 0$.)

Exemplo: cubo equilibrado sobre cilindro



Vimos que

$$U(\theta) = mg[(r+b)\cos\theta + r\theta\sin\theta];$$

se θ é pequeno,

$$\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \quad \text{e} \quad \sin\theta \approx \theta$$

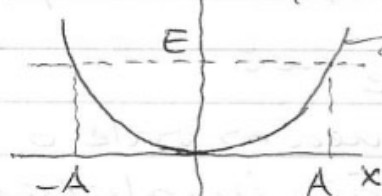
$$U(\theta) \approx mg \left[(r+b) \left(1 - \frac{1}{2}\theta^2 \right) + r\theta^2 \right] =$$

$$= mg(r+b) + \frac{1}{2} mg(r-b)\theta^2, \text{ que}$$

tem a forma $\frac{1}{2} k \theta^2$ com $k = mg(r-b)$ - e, de fato, o equilíbrio só é estável se $k > 0$ ($r > b$).

Como já discutido, as características gerais deste movimento podem ser obtidas da análise do gráfico $U(x) \times x$.

$U(x)$ /energia

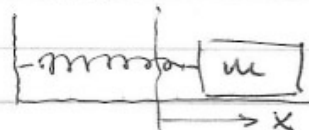


parábola

Sistema com energia total $E (> 0)$ é ligado e oscila

entre $x = -A$ e $x = A$ ($E = \frac{1}{2} k A^2$): A é a amplitude das oscilações.

5.2 Movimento harmônico simples



$x=0$ (equilíbrio)

$$m \ddot{x} = F_x = -kx$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m} x = -\omega^2 x$$

tilibre

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, que é a frequência angular com que o sistema oscila. Esta eq. de movimento se aplica a muitos sistemas diferentes, em diferentes sistemas de coordenadas. Vimos, por exemplo, no cap. 1 que a eq. para a coordenada angular de um pêndulo simples, ou para um skate num tubo, é $\ddot{\phi} = -\omega^2 \phi$ - a mesma!

Vamos rever as propriedades de suas soluções, que podemos escrever de várias formas distintas.

Soluções exponenciais

Esta é uma eq. diferencial linear, homogênea e de 2ª ordem $\rightarrow$ tem 2 soluções independentes. Uma das formas de escrevê-las é

$$x(t) = e^{i\omega t} \quad \text{e} \quad x(t) = e^{-i\omega t}$$

(veja que ambas satisfazem a eq.)

A solução geral é

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}$$

(eq. linear e homogênea $\rightarrow$ vale o princípio da superposição: qualquer combinação linear de soluções é também solução) - logo, qualquer solução pode ser escrita desta forma, escolhendo-se C_1 e C_2 convenientemente.

Soluções senoidais

A forma anterior tem uma desvantagem: $x(t)$ é real, enquanto as exponenciais são complexas $\Rightarrow C_1$ e C_2 devem ser escolhidos com cuidado. Podemos, no entanto, reescrevê-la usando a fórmula de Euler

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$$

"

$$\begin{aligned} x(t) &= (C_1 + C_2) \cos \omega t + i(C_1 - C_2) \sin \omega t \\ &= B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t, \end{aligned}$$

$$B_1 = C_1 + C_2 \quad \text{e}$$

$$B_2 = i(C_1 - C_2), \quad \text{reais}$$

Esta última forma pode ser tomada como definição de um MHS: é todo movimento obtido por combinações lineares de $\sin$ e $\cos$ do mesmo argumento.

É fácil identificar B_1 e B_2 com as condições iniciais:

$$x(t=0) = B_1 = x_0$$

$$\dot{x}(t=0) = \omega B_2 = v_0$$

Se, em $t=0$, $x(0)=x_0$ e $v_0=0$ (descreva como conseguir isto!),

$$x(t) = x_0 \cos \omega t \quad (\text{gráfico})$$

Se, em $t=0$, $x(0)=0$ e $v_0 \neq 0$ (idem)

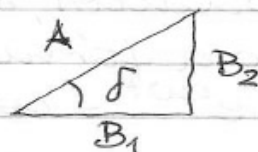
$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad (\text{gráfico})$$

Estas soluções são periódicas, com período $\omega T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

Soluções cosseno + fase

A solução geral é + difícil de visualizar do que os 2 casos especiais mostrados. Para facilitar este aspecto, é útil escrevê-la. Vamos definir outra constante

$$A = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$$



Agora,

$$x(t) = A \left[\frac{B_1}{A} \cos(\omega t) + \frac{B_2}{A} \sin(\omega t) \right]$$
$$= A \left[\cos \delta \cos(\omega t) + \sin \delta \sin(\omega t) \right]$$

$$= A \cos(\omega t - \delta),$$

que deixa claro que o sistema oscila com amplitude A e frequência angular ω ; a solução é um cosseno defasado de δ : em $t=0$, seu argumento é $-\delta$, e as oscilações estão atrasadas com relação ao cosseno pela fase δ (phase shift)

Obtivemos a solução geral diretamente da eq. de movimento, mas ela também pode ser obtida pelo método da energia (Lista 6).

Solução como a parte real de uma exponencial complexa

Outra forma útil de escrever a solução, em termos das exponenciais complexas: em termos de B_1 e B_2 ,

$$C_1 = \frac{1}{2} (B_1 - iB_2) \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{1}{2} (B_1 + iB_2)$$

$$\Rightarrow x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2^* e^{-i\omega t}$$

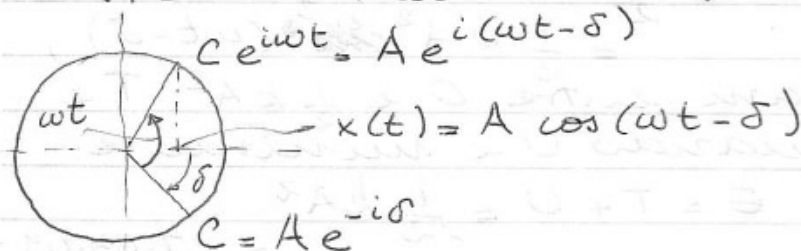
$$x(t) = 2 \operatorname{Re} C_1 e^{i\omega t} \quad (z + z^* = 2 \operatorname{Re} z)$$

Se definirmos $C = 2C_1$,

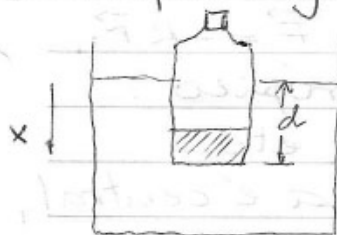
$$C = B_1 - iB_2 = A e^{-i\delta}, \quad \text{e}$$

$$x(t) = \operatorname{Re} C e^{i\omega t} = \operatorname{Re} A e^{i(\omega t - \delta)}$$

Este resultado é ilustrado na figura.



Exemplo: garrafa flutuando num balde



No equilíbrio, $d = d_0$

Forças na garrafa:

peso = mg (p/ baixo)

empuxo = $\rho g A d$

No equilíbrio, $mg = \rho g A d_0$ ($\Rightarrow m = \rho A d_0$)

Se $d = d_0 + x$ (x é coordenada medida a partir da posição de equilíbrio, sempre a melhor nestes casos)

$$m \ddot{x} = mg - \rho g A (d_0 + x) = -\rho g A x$$

e

$$\ddot{x} = -\frac{\rho A}{m} g x = -\frac{g}{d_0} x$$

→ MHS com $\omega = \sqrt{\frac{g}{d_0}}$, que nao

depende de m , ρ e A explicitamente, e é a mesma de um pendulo simples de comprimento d_0 . Se $d_0 = 20 \text{ cm}$,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{d_0}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{0,20}{9,8}} = 0,9 \text{ s.}$$

Análise da energia

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t - \delta), \text{ e}$$

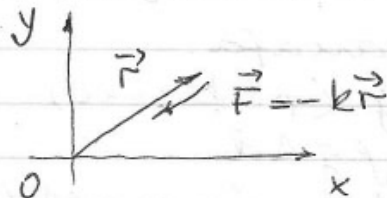
$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - \delta) = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t - \delta),$$

que oscilam entre 0 e $\frac{1}{2} k A^2$. T é máximo quando U é mínimo e vice-versa. $E = T + U = \frac{1}{2} k A^2$.

- 27-04-09 -

5.3 Osciladores bidimensionais

Em 2D e 3D, as possibilidades são + ricas. O caso + simples é $\vec{F} = -k\vec{r}$, o oscilador harmônico isotrópico:



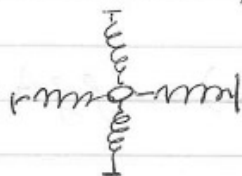
$$F_x = -kx, \text{ etc.}$$

e a força é central, dirigida para a posição de equilíbrio, que

escolhi como origem.

Exemplo concreto:

(4 molas idênticas).



Em 3D: átomo em cristal simétrico, próton em núcleo.

Em 2D, $\ddot{x} = -\omega^2 x$
 $\ddot{y} = -\omega^2 y$, $\omega = \sqrt{k/m}$

$$x(t) = A_x \cos(\omega t - \delta_x)$$

$$y(t) = A_y \cos(\omega t - \delta_y)$$

com as constantes A_x, A_y, δ_x e δ_y determinadas pelas condições iniciais. Podemos redefinir a origem dos tempos e, com isso, eliminar δ_x (por exemplo), e a forma + simples para a solução geral é

$$x(t) = A_x \cos(\omega t)$$

$$y(t) = A_y \cos(\omega t - \delta) \quad (\delta = \delta_y - \delta_x \text{ é a fase relativa})$$

O comportamento da solução depende dos valores das constantes:

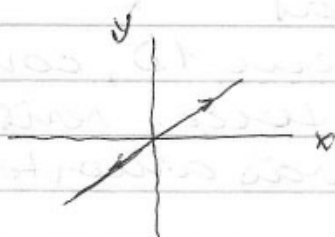
- se A_x ou $A_y = 0 \Rightarrow$ MHS em 1D.

- se A_x e $A_y \neq 0$:

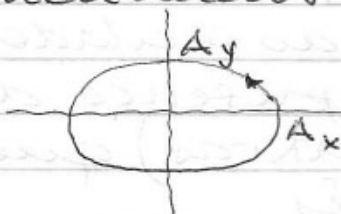
• se $\delta = 0$, movimentos em fase

• se $\delta = \pi/2$, movimentos ~~em~~ elipse

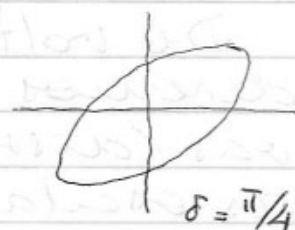
• para outro δ , elipse com eixos inclinados



$\delta = 0$



$\delta = \pi/2$



$\delta = \pi/4$

Num oscilador anisotrópico,

$$F_x = -k_x x, \quad F_y = -k_y y, \quad F_z = -k_z z$$

$$(k_x \neq k_y \neq k_z)$$

Exemplo: átomo em cristal de baixa simetria.

Em 2D, $\ddot{x} = -\omega_x^2 x$
 $\ddot{y} = -\omega_y^2 y$, $\omega_i = \sqrt{k_i/m}$

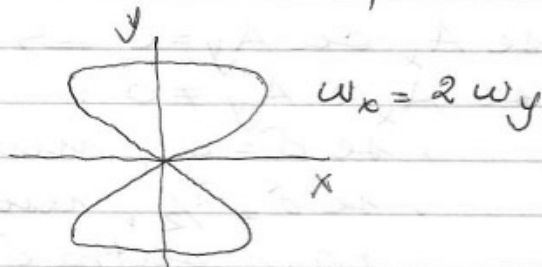
e a solução geral é

$$x(t) = A_x \cos(\omega_x t)$$

$$y(t) = A_y \cos(\omega_y t + \delta)$$

Se $\frac{\omega_x}{\omega_y}$ é racional, movimento é periódico (ver lista 7) e a trajetória resultante é chamada uma figura de Lissajous.

Se $\frac{\omega_x}{\omega_y}$ é irracional, o movimento nunca se repete - é chamado de quase periódico (coordenadas separadas têm movimento periódico, mas $\vec{r}$ não)



5.4 Oscilações amortecidas

De volta ao oscilador em 1D, consideremos a presença de forças resistivas (dissipativas) que vão amortecer as oscilações:

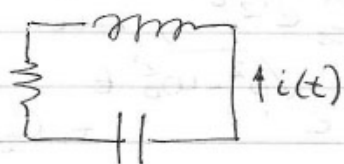
- atrito cinético: constante em módulo (aproximadamente) e oposto a $\vec{v}$
- arrasto de fluido: $\sim -v^n \hat{v}$

Vamos considerar aqui apenas o arrasto linear, $\vec{f} = -b\vec{v}$ (a equação é simples de resolver e aparece em muitos contextos diferentes - ~~na~~ para outras formas de arrasto, complicações podem surgir: caos!)

A resultante é $-b\dot{x} - kx$, e a eq. de movimento

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

(a mesma equação aparece no estudo de circuitos RLC, por exemplo ~~ex~~):



$$V_L = L\dot{i} = L\ddot{q}$$

$$V_R = Ri = R\dot{q}$$

$$V_C = \frac{q}{C}$$

$$\Rightarrow L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$$

inércia

arrasto

constante de "mola"

Vamos reescrevê-la, com $2\beta = \frac{b}{m}$ e $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

frequência natural do sistema

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

(dim β, ω_0 : s^{-1})

eq. diferencial linear, homogênea e de 2ª ordem $\Rightarrow$ se encontrarmos 2 soluções independentes $x_1(t)$ e $x_2(t)$ ($x_1(t) \neq Cx_2(t)$), a solução geral é $C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$. Isto significa que podemos usar "divinhação inspirada" para

encontrá-las.

Tentemos soluções da forma $x(t) = e^{rt}$:

$$\dot{x} = r e^{rt}$$

$$\ddot{x} = r^2 e^{rt}$$

$\Downarrow$

$$r^2 + 2\beta r + \omega_0^2 = 0 \quad (\text{eq. auxiliar})$$

$\Downarrow$

$$r = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \Rightarrow r_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

$$r_2 = -$$

(se $\beta \neq \omega_0$)

Com isto, achamos 2 soluções independentes! A solução geral é

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \text{ ou}$$

$$x(t) = e^{-\beta t} \left(C_1 e^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \right)$$

Vamos ver o que significa.

- oscilações não amortecidas

$$\beta = 0 \Rightarrow x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}$$

- amortecimento fraco ($\beta < \omega_0$)

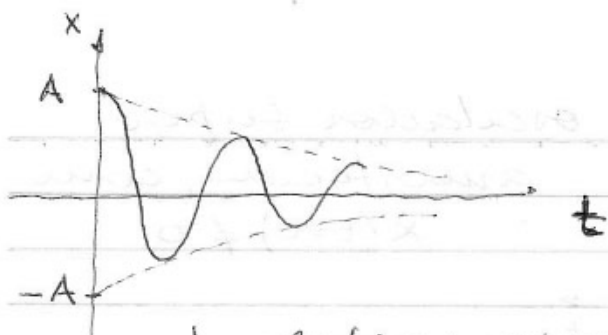
$$i\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = i\omega_1 \quad (\omega_1 < \omega_0)$$

$$x(t) = e^{-\beta t} \left(C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_1 t} \right)$$

MHS com frequência $\omega_1 (< \omega_0)$

fator de amortecimento da amplitude

$$x(t) = A e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta)$$



não periódico; mas
continuamos a poder
definir período ($T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$)

$\frac{1}{\beta}$ define escala de tempo do amor-
tecimento: tempo necessário
para a amplitude diminuir por fator
 $\frac{1}{e}$. Quanto maior for β ($< \omega_0$), mais
rápido decaem as oscilações.

Caso extremo: $\beta \ll \omega_0 \Rightarrow \omega_1 \approx \omega_0$.

- amortecimento forte ($\beta > \omega_0$)

Reescrevo a solução

$$x(t) = C_1 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}$$

soma de 2 exponenciais (reais) de-
crescentes. Neste caso, o amortecimento
é tão intenso que o sistema não chega
a completar uma oscilação. A 1ª expo-
nencial decai + lentamente ($\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$
 $< \beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$) e domina a solução para
tempos longos, e a taxa de decaimento
do movimento neste regime é carac-
terizada pelo parâmetro $\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ (ou
seu inverso, que tem a dimensão de
tempo). Este parâmetro decrece
com β (se $f(\beta) = \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$, $f'(\beta) =$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \omega_0^2/\beta^2}} < 0$$

), e o movimento
leva mais tempo para cessar quando o
amortecimento aumenta!

$x(t)/A$ 

oscilador super
amortecido, com
 $\dot{x}(t=0) \neq 0$

- amortecimento crítico

é a fronteira entre os 2 anteriores, quando $\beta = \omega_0$.

Do ponto de vista matemático, neste caso $x_1(t)$ e $x_2(t)$ antes encontradas são iguais

$$x_1(t) = x_2(t) = e^{-\beta t}$$

Temos, portanto que achar uma 2ª solução independente desta. Lá vai: ($\beta = \omega_0$)

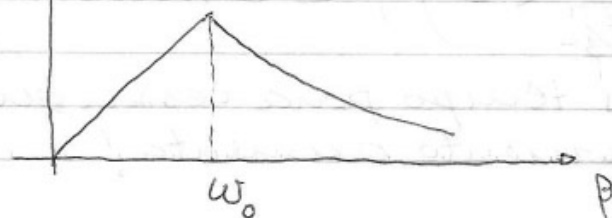
$x_2(t) = t e^{-\beta t}$, e a solução geral é

$x(t) = C_1 e^{-\beta t} + C_2 t e^{-\beta t} = e^{-\beta t} (C_1 + C_2 t)$,
e o fator exponencial domina o decaimento para tempos longos.

Tabela para os fatores de decaimento:

amortecimento	β	fator (parâmetro)
—	0	0
fraco	$< \omega_0$	β
crítico	$= \omega_0$	β
forte	$> \omega_0$	$\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

parâmetro
de
decaimento



O gráfico mostra que o movimento se extingue + rápido quando $\beta = \omega_0$ (situação crítica). Há situações onde isto é desejável (agulha de aparelho de medida analógico, por exemplo, ou ~~um~~ sistema de amortecimento de carros). Nestes casos, devemos escolher amortecimento próximo ao crítico.

-29/04/09

5.5 Oscilações forçadas e amortecidas.

Se queremos oscilações (reais) que não se extinguam, devemos ter força externa para mantê-las. Por exemplo, o movimento do pêndulo em relógio é mantido por empurrões periódicos dados pelos pesos; o de um balanço de criança, idem. Vamos chamar a força externa de $F(t)$; com amortecimento linear, a eq. de movimento é

$$m \ddot{x} + b \dot{x} + kx = F(t)$$

equação que também aparece em várias outras áreas da Física. Exemplo importante: circuito RLC com gerador em série:

$$L \ddot{q} + R \dot{q} + \frac{1}{C} q = \mathcal{E}(t)$$

Vamos reescrevê-la, com a notação anterior e $f(t) = \frac{F(t)}{m}$:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$$

Operadores diferenciais lineares

É conveniente pensar no lado esquerdo desta equação como o resultado da aplicação de um certo operador D sobre a função $x(t)$.

$$D = \frac{d^2}{dt^2} + 2\beta \frac{d}{dt} + \omega_0^2, \quad \text{e a eq.}$$

fica $Dx = f$.

A noção (conceito) de um operador diferencial como este é uma ferramenta matemática poderosa, com muitas aplicações em física. Em nosso presente caso, a característica importante deste operador é ser linear:

$$D(ax_1 + bx_2) = aDx_1 + bDx_2,$$

a e b constantes, x_1 e x_2 funções de t .
(linguagem da álgebra linear: lembra)

Nesta linguagem, a eq. do oscilador amortecido (sem forçamento) é

$$Dx = 0$$

O princípio de superposição se torna óbvio nesta linguagem: se $Dx_1 = 0$ e $Dx_2 = 0$,
 $D(ax_1 + bx_2) = aDx_1 + bDx_2 = 0 + 0 = 0$

A equação $Dx = 0$ é chamada de homogênea: cada termo envolve x ou uma de suas derivadas ^{exatamente} ~~apenas~~ 1 vez. A equação $Dx = f$ é chamada de inhomogênea: o termo f , que não envolve x , é o responsável pelo nome. Temos agora que resolvê-la.

Soluções homogênea e particular

Com a notação de operadores, a solução geral da equação do oscilador forçado fica muito simples.

Suponha que encontremos $x_p(t)$ tal que

$$Dx_p = f$$

Chamamos essa de uma solução particular. Suponha também que encontremos $x_h(t)$ satisfazendo a

$$Dx_h = 0$$

Esta é ~~uma~~ solução ^{geral} (da) homogênea. Já sabemos, para esta equação, que

$$x_h(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}. \text{ Mas}$$

$$D(x_p + x_h) = Dx_p + Dx_h = f$$

Como $x_p + x_h$ tem 2 constantes arbitrárias (em x_h), esta é a solução geral.

Soluções complexas para forçamento senoidal.

Suponha que $f(t) = f_0 \cos(\omega t)$.

(Cuidado! $\omega \neq \omega_0$) - vamos ver que o oscilador "responde" com + intensidade quando $\omega \approx \omega_0$). A importância deste problema reside principalmente em que (quase) qualquer força pode ser escrita como uma série de forças senoidais (teorema de Fourier).

A equação a resolver é

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)$$

Considere também $\ddot{y} + 2\beta \dot{y} + \omega_0^2 y = f_0 \sin(\omega t)$

Vamos definir a função complexa

$$z(t) = x(t) + iy(t). \text{ Então,}$$

$\ddot{z} + 2\beta\dot{z} + \omega_0^2 z = f_0 e^{i\omega t}$, que é muito + fácil de resolver graças às propriedades da exponencial. Depois de resolvê-la, basta tomar a parte real da solução.

Vamos "adivinhar" uma solução:

$$z(t) = C e^{i\omega t} \quad (\text{porque?})$$

$$\Downarrow$$
$$(-\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2) C e^{i\omega t} = f_0 e^{i\omega t}$$

$$\Downarrow$$

z é solução se $C = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega}$

Antes de tomar $\text{Re}(z)$, resolvemos C na forma $C = A e^{-i\delta}$, A e $\delta \in \mathbb{R}$.

Quem são?

$$A^2 = CC^* = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega} \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\beta\omega}$$

$$\rightarrow A^2 = \frac{f_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}$$

(e A é a amplitude das oscilações provocadas por $f(t)$). Este importante resultado mostra como a amplitude das oscilações depende dos vários parâmetros do problema (já que $x_h(t) \rightarrow 0$ quando t cresce). Vemos que ela é grande quando $\omega \approx \omega_0$: o oscilador responde mais intensamente quando é forçado a uma frequência ω próxima a sua frequência natural ω_0 .

O ângulo de fase δ :

$$A e^{-i\delta} = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega}$$

$$\Rightarrow f_0 e^{i\delta} = A (\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega)$$

Como f_0 e A são reais, δ é a fase do número complexo $(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\beta\omega$; logo

$$\delta = \arctg\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

A solução $z(t) = C e^{i\omega t} = A e^{i(\omega t - \delta)}$ está completa

$\Rightarrow x(t) = \text{Re}(z(t)) = A \cos(\omega t - \delta)$,
e a solução geral é

$$x(t) = A \cos(\omega t - \delta) + C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

Como os 2 termos da solução homogênea decaem exponencialmente (r_1 e $r_2 < 0$), são chamados de transientes (de "transitórios"). Eles dependem das condições iniciais mas ~~vão~~ tornam-se logo irrelevantes. O comportamento a longo prazo da solução é dominado pelo termo $\cos$ da solução particular.

Importante ressaltar: esta é a solução para um oscilador linear (tanto a força restauradora quanto o arrasto são lineares). Osciladores não-lineares são, no entanto, + comuns e dão origem a comportamentos + ricos e inusitados.

Os detalhes do movimento do oscilador forçado dependem da intensidade do parâmetro de amortecimento β .

Um exemplo; se o amortecimento é fraco ($\beta < \omega_0$), os termos de transiente podem ser reescritos na forma

$$x(t) = A \cos(\omega t - \delta) + A_{tr} e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t - \delta_{tr})$$

As constantes A_{tr} e δ_{tr} são arbitrárias e determinadas pelas condições iniciais; A e δ não, e são determinadas independentemente das condições iniciais pelos parâmetros do sistema. Enquanto ~~transiente~~ ~~decai~~ as oscilações do transiente têm frequência ω_1 com amplitude que decresce exponencialmente ($e^{-\beta t}$), as oscilações forçadas têm amplitude fixa e frequência ω do forçamento. Portanto, quaisquer que sejam as condições iniciais, depois de um (curto) período inicial, o sistema oscilará sempre do mesmo modo, com frequência igual a do forçamento e com um atraso de fase δ em relação a este: este é um exemplo de um atrator de uma dada dinâmica, conceito que ganha muita relevância no estudo de sistemas não-lineares e sujeitos a comportamentos caóticos.

56 Ressonância

Estudaremos como a amplitude e a fase do atrator dependem dos parâmetros do sistema.

$A \propto f_0$: fácil de adivinhar.

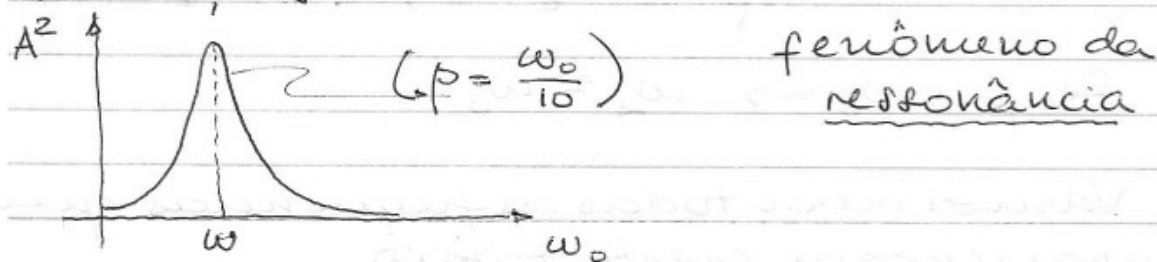
A depende também de ω , ω_0 e β .

O caso + interessante é quando

$$\beta \ll \omega_0.$$

$$\text{Como } A^2 = \frac{f_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}$$

neste caso, a 2ª parcela do denominador é pequena; se ω_0 e ω são muito diferentes, $(\omega_0^2 - \omega^2)^2$ é grande e a amplitude é pequena. Por outro lado, se ω é próximo a ω_0 , as 2 parcelas são pequenas e A é grande. Portanto, se variarmos ω (ou ω_0), observaremos grande variação na amplitude das oscilações:



Aplicação cotidiana: recepção de sinais de rádio por circuito RLC. Quando você sintoniza seu rádio em 90,3 MHz ~~você~~ está ajustando o circuito RLC da sintonia para que esta seja sua frequência natural (ω_0). Todas as estações estão transmitindo e as ondas EM que

emitem chegando a seu rádio, mas só o sinal com a frequência "certa" induz corrente significativa.

Exemplo mecânico: carro passando por sequência de lombadas; soldados marchando sobre uma ponte.

Os detalhes do fenômeno têm algumas complicações. Por exemplo, a posição exata do máximo depende de se variamos ω com ω_0 fixo ou vice-versa.

A é máximo quando $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2$ é mínimo; se variamos ω_0 , este mínimo ocorre quando $\omega_0 = \omega$ - mas se variamos ω , o 2º termo também varia, e o máximo ocorre em:

$$f(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2$$

$$f'(\omega) = 2(\omega_0^2 - \omega^2) \cdot (-2\omega) + 8\beta^2\omega = 0$$
$$2\beta^2 = \omega_0^2 - \omega^2, \text{ e } \omega = \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

$$\text{Se } \beta \ll \omega_0 \Rightarrow \omega_2 \approx \omega_0$$

Vamos rever todas as frequências que apareceram neste tópico:

ω_0 : frequência natural do oscilador (sem amortecimento)

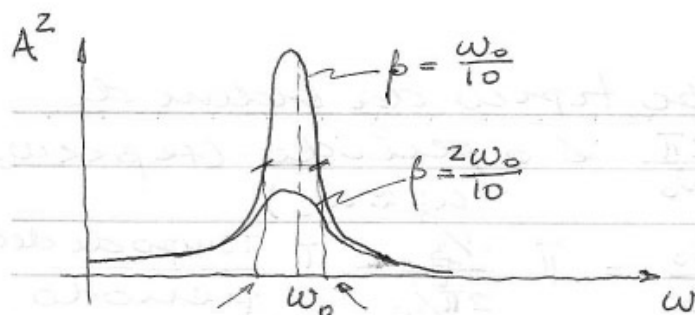
$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$: frequência do oscilador (fracamente) amortecido

ω : frequência de forçamento

$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$: valor de ω para a qual resposta é máxima

$$A_{\max} \approx \frac{f_0}{2\beta\omega_0}$$

(ω_0 fixa)



Se β diminui, $A_{\max}$ aumenta e o pico fica + estreito. (e ω_2 + próxima de ω_0)

- Largura da ressonância; o fator de qualidade Q

Vamos definir a largura (à meta-de do máximo) como o intervalo entre 2 valores de ω nos quais

$$A^2 = \frac{1}{2} A_{\max}^2 \Rightarrow \omega \approx \omega_0 \pm \beta$$

↓
largura $\approx 2\beta$, meialargura $\approx \beta$

A "nitidez" do pico de ressonância é indicada pela razão entre a largura e a posição do pico. Como, em muitas aplicações, queremos ressonâncias muito nítidas, definiremos seu fator de qualidade $Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$

Exemplos: bons relógios precisam de alto Q . Q (pendulo) ≈ 100

Q (cristal de quartzo) ≈ 10.000

Outra forma de olhar o Q : na ausência de forçamento, oscilações são amorteci-

das num tempo típico da ordem de $\frac{1}{\beta}$. Mas $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ é o período (se $\beta \ll \omega_0$, $\omega_1 \approx \omega_0$)

$$\text{Portanto, } Q = \frac{\omega_0}{2\beta} = \pi \frac{1/\beta}{2\pi/\omega_0} = \pi \underbrace{\frac{\text{tempo de decaimento}}{\text{período}}}_{\text{número de ciclos}}$$

Defasagem na ressonância.

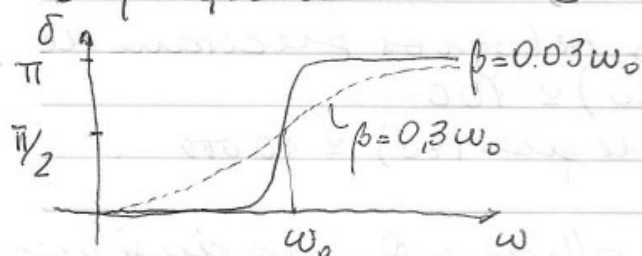
$$\delta = \arctg\left(\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Vamos acompanhar δ quando variarmos ω , começando por valores pequenos (β pequeno) :- com $\omega \ll \omega_0$, δ é pequeno $\Rightarrow$ oscilações estão praticamente em fase com o forçamento

- quando $\omega \rightarrow \omega_0$, δ aumenta (devagar)

- na ressonância, $\omega = \omega_0$ e $\delta = \pi/2$

- $\omega > \omega_0$, o argumento do $\arctg$ é < 0 e se aproxima de 0 quando ω cresce $\Rightarrow \delta$ passa de $\pi/2$ e se aproxima de π . Em particular, se $\omega \gg \omega_0$, as oscilações estão quase perfeitamente em oposição de fase com o forçamento. (experiência com pêndulo)



Em colisões atômicas e nucleares, δ (phase shift) tem muita importância.