

Cap. 3. Momento (linear) e momento angular.

Comecemos aqui a descrever as leis de conservação da mecânica (momentos linear e angular, e energia).

Elas estão intimamente relacionadas e são vistas como os pilares de sustentação de toda a física moderna. Curiosamente, na mecânica clássica as 2 primeiras são muito diferentes da última (energia), cuja demonstração é surpreendentemente útil.

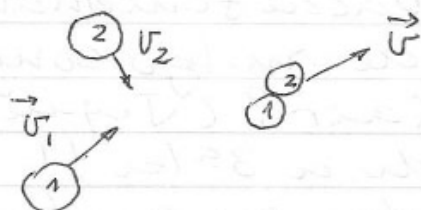
3.1 Conservação do momento linear

Já vimos no cap. 1: se as forças internas a um sistema de N partículas obedecem a 3ª lei, então

$$\dot{\vec{P}} = \vec{F}^{ext} \quad (\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i)$$

Princípio da conservação do momento (linear): Se $\vec{F}^{ext} = 0 \Rightarrow$ o momento mecânico total do sistema $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i$ é conservado (é constante)

Exemplo (simples e bem conhecido): colisão inelástica de 2 corpos



Se $\vec{F}^{ext} = 0$ (ou pode ser desprezada durante o curto intervalo de tempo ~~em~~ que

dura a colisão),

$$\vec{P}_{in} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \vec{P}_{fin} = m_1 \vec{v} + m_2 \vec{v} = (m_1 + m_2) \vec{v}$$

$$\vec{v} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (\text{média ponderada das velocidades})$$

$$\text{Se } \vec{v}_2 = 0 \Rightarrow \vec{v} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1$$

(usado em perícia policial de acidentes de carro - \vec{v} pode ser determinada pelas marcas de pneus)

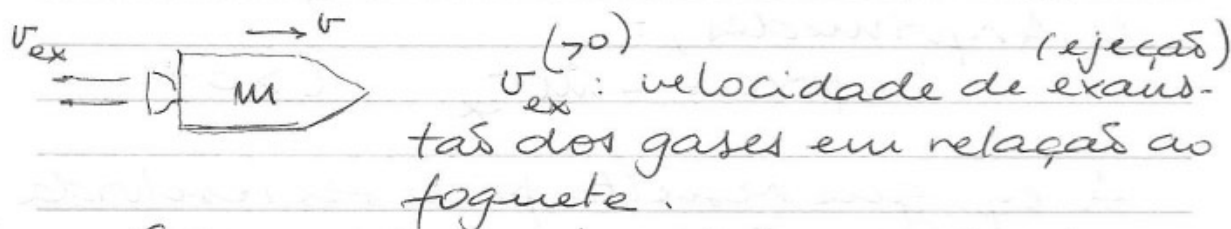
Este tipo de análise - usando a conservação do momento - é ferramenta importante na solução de muitos problemas, desde reações nucleares até batidas de carro e colisões de galáxias.

3.2 Foguetes

Um bonito exemplo do uso da conservação do momento é a análise da propulsão de foguetes. O problema básico do engenheiro é: como fazê-lo se mover (acelerar) sem nenhum agente externo? Situações semelhantes: ponha-se no meio de um lago congelado sem atrito: como sair? (Jogue fora as botas!) - usando a 3ª lei!! É o que faz um foguete: seu motor é

projetado para atirar fora combustível pela parte de trás com a maior velocidade possível, e acelerar para a frente graças à 3ª lei.

Para a análise quantitativa devemos examinar o momento total.



Como o foguete ejeta massa, sua massa decresce com o tempo. Em t :

$$P(t) = m v \quad ; \quad \text{em } t + dt$$

$$p_{\text{foguete}}(t + dt) = (m + dm)(v + dv) \quad (dm < 0)$$

O combustível ejetado neste intervalo tem massa $(-dm)$ (positiva!) e velocidade $v - v_{ex}$ em relação ao chão; portanto,

$$P(t + dt) = (m + dm)(v + dv) + (-dm)(v - v_{ex})$$

$$= m v + m dv + dm v_{ex} + \cancel{dm dv}$$

Logo,

$$dP = P(t + dt) - P(t) = m dv + dm v_{ex}$$

Se $F^{ext} \neq 0$,

$$dP = F^{ext} dt \quad (\text{g, por exemplo})$$

Se $F^{ext} = 0$, $dP = 0$, e

$$m dv = -dm v_{ex}$$

⇓

$$m \frac{dv}{dt} = m \dot{v} = - \dot{m} v_{ex} = - \frac{dm}{dt} v_{ex}$$

onde $-\dot{m}$ ($> 0!$) é a taxa com que o motor do foguete ejeta massa. O termo $-\dot{m}v_{ex}$ desempenha o papel da força na 2ª lei, e é comumente chamado de empuxo (não confunda com aquele envolvido no princípio de Arquimedes):

$$\text{empuxo} = -\dot{m}v_{ex} \quad (> 0)$$

A eq. que resulta pode ser resolvida por separação de variáveis:

$$dv = -v_{ex} \frac{dm}{m}, \quad \text{e, se } v_{ex} \text{ é constante,}$$
$$\int_{v_0}^v \frac{1}{v} dv = -v_{ex} \int_{m_0}^m \frac{1}{m} dm$$

(v_0 : velocidade inicial, e m_0 massa inicial do foguete ~~+~~ incluindo o combustível!) Este resultado impõe uma restrição severa à velocidade máxima de um foguete. A razão $\frac{m_0}{m}$ é máxima quando todo o combustível tiver sido consumido e m for apenas a massa do foguete (caixa) e sua carga. Mesmo que, por exemplo, a massa original seja 90% combustível, esta razão é apenas 10, e a velocidade máxima ganha ($v - v_0$) não pode ser maior que $2,3v_{ex}$ ($\ln 10 = 2,3$). Por isso os engenheiros buscam v_{ex} máximo e foguetes com múltiplos estágios.

3.3 Centro de massa

Seja um sistema de N partículas, $\alpha = 1, \dots, N$, com massas m_α e posições \vec{r}_α relativas à origem O . O centro de massa (CM) do sistema é definido como a posição ("fantasma")

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}_\alpha \quad \left(M = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \right)$$

Esta é uma equação vetorial; e em componentes cartesianas, ela é equivalente às 3 escalares

$$X = \frac{1}{M} \sum m_\alpha x_\alpha, \quad Y = \frac{1}{M} \sum m_\alpha y_\alpha, \quad Z = \frac{1}{M} \sum m_\alpha z_\alpha$$

~~Seja~~ A posição do CM é a média, ponderada pelas massas m_α , dos \vec{r}_α . Sua velocidade é

$$\dot{\vec{R}} = \frac{1}{M} \sum m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha$$

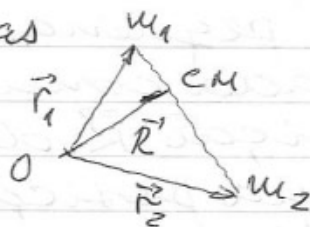
Sistema de 2 partículas:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

- o CM está no segmento de reta que une as 2 partículas

- as distâncias entre as partículas 1 e 2 e o CM estão na razão $\frac{m_2}{m_1}$

\Rightarrow CM está + próximo $\frac{m_1}{m_2}$ da partícula de maior massa. Se $m_1 \gg m_2$, $\vec{R} \approx \vec{r}_1$



Para N partículas, se $m_1 \gg m_\alpha$ ($\alpha = 2, \dots, N$)
e $m_1 \approx M$, $\vec{R} \approx \vec{r}_1$

(o CM do sistema solar fica muito próximo do Sol)

Podemos escrever o momento total de um sistema de N partículas em termos da velocidade do CM:

$$\vec{P} = \sum_1 \vec{p}_\alpha = \sum_1 m_\alpha \dot{\vec{r}}_\alpha = M \dot{\vec{R}}$$

\Rightarrow o momento total é o de uma partícula de massa M e velocidade igual a do CM.

Melhor ainda:

$$\vec{P} = \vec{F}_{\text{ext}} = M \ddot{\vec{R}} \Rightarrow \text{o CM } \vec{R}$$

se move como se fosse partícula de massa M sujeita à resultante das forças externas que agem sobre o sistema. É este resultado que nos permite muitas vezes tratar objetos extensos como se fossem partículas: se a extensão do objeto é pequena na escala de (comparada com) sua trajetória, a posição \vec{R} de seu CM representa bem sua posição, e a eq. acima implica em que \vec{R} se mova como um ponto material.

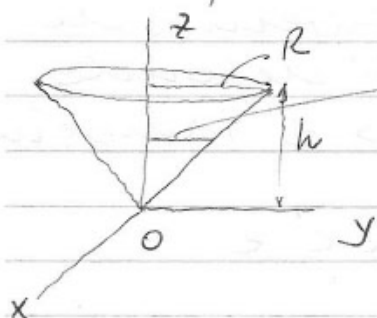
Quando a massa de um objeto tem distribuição contínua (e não granulada),

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \int \vec{r}^3 dm = \frac{1}{M} \int \rho \vec{r}^3 dV$$

↳ densidade.

(integral sobre o volume ocupado pelo objeto, região onde $\rho \neq 0$).

Exemplo: CM de cone sólido uniforme



$$r = \frac{Rz}{h}$$

Por simetria,
 $\vec{R} \propto \hat{z}$:

componente x \rightarrow

contribuições do ponto

$(-x, y, z)$ é cancelada

pela do ponto (x, y, z)

$$z = \frac{1}{M} \int \rho z dV = \frac{\rho}{M} \int z dx dy dz$$

Para um z fixo, a integral em $dx dy$ é sobre círculo de raio $r = \frac{Rz}{h}$, dando fator $\pi r^2 = \frac{\pi R^2}{h^2} z^2$;

$$z = \frac{\rho \pi R^2}{M h^2} \int_0^h z z^2 dz = \frac{\rho \pi R^2}{M h^2} \cdot \frac{h^4}{4}$$

$$= \frac{3}{4} h$$

(já que $M = \rho \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 h$)

3.4 Momento angular de uma partícula

Sua conservação exibe um claro paralelo com a do momento linear. Vamos rever o formalismo, primeiro para uma partícula, depois para um sistema de partículas.

O momento angular de 1 partícula é o vetor \vec{L} definido por $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ (medido em relação à origem de 1 sistema de coordenadas). Como \vec{r} depende da origem escolhida $\Rightarrow \vec{L}$ também.

A taxa de variação de \vec{L} é:

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \underbrace{(\dot{\vec{r}} \times \vec{p})}_{=0 \text{ (porque?)}} + (\vec{r} \times \dot{\vec{p}})$$

$\Rightarrow \dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$: o torque (relativo à mesma origem) sobre a partícula. É o análogo rotacional de $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$, muitas vezes apontada como a forma rotacional da 2ª lei.

Em muitos problemas de 1 partícula é possível escolher-se O (a origem) de modo que o torque resultante em relação a ela seja nulo. Neste caso, $\dot{\vec{L}} = 0 \Rightarrow \vec{L}$ é constante.

Exemplo: modelo de partícula apli-

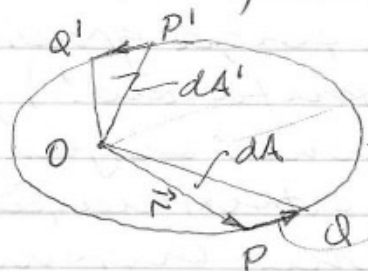
cado ao movimento de um planeta (ou cometa), ignorando-se as interações gravitacionais outras que não a com o sol. Como esta força gravitacional é central (significado?), \vec{F} é paralelo a \vec{r} (sol como origem) e $\vec{\tau} = 0$. Portanto, nesta aproximação, se escolhermos o sol como origem, \vec{L} é constante, o que simplifica muito a análise do movimento planetário. Por exemplo: como \vec{L} é perpendicular ao plano da órbita (porque $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$) e é constante, a órbita planetária fica confinada a um único plano que contém o sol, e o problema se torna bi-dimensional.

- 25/03/09 -

2ª lei de Kepler : um dos primeiros triunfos da mecânica newtoniana foi a explicação que deu a esta lei como uma consequência direta da conservação do momento angular.

As Leis de Kepler são leis fenomenológicas, descrições matemáticas sintéticas dos movimentos planetários observados, e não tentam explicar estes movimentos em termos de ideias + fundamentais. Mas elas podem ser explicadas como consequências das leis de Newton.

Seu enunciado: a linha que liga o sol a um planeta varre áreas iguais em tempos iguais.



→ sol (suposto fixo - mas é necessário, veremos + tarde)

$$d\vec{r} = \vec{v} dt$$

Isto é: se $dt = dt' \Rightarrow dA = dA'$; ou $\frac{dA}{dt}$ é constante.

Propriedade do produto vetorial: se \vec{a} e \vec{b} são 2 lados de um triângulo, sua área é $\frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$ ($= \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$)



$$\text{Logo, } dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v} dt| =$$

$$= \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{p}| \frac{dt}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m} |\vec{r} \times \vec{p}| = \frac{1}{2m} |\vec{e}| = \frac{e}{2m}$$

$$(e = |\vec{e}|)$$

Como \vec{e} é constante, e e $\frac{dA}{dt}$ também o são \Rightarrow 2ª lei de Kepler.

Uma outra demonstração deste mesmo resultado nos dá informações adicionais: em problema da lista você mostrará que $e = m r^2 \omega$ e que $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \omega$ \Rightarrow e é constante se e somente se $\frac{dA}{dt}$ também o for. Além disso, vemos

que

quando um planeta se aproxima do sol (r decresce), $\omega (= \dot{\phi})$ tem que aumentar ($\omega \propto \frac{1}{r^2}$)

A 2ª lei de Kepler é, portanto, verdadeira para qualquer objeto (partícula) que se mova sob a ação única de uma força central (qualquer!).

Já as outras 2 dependem da forma funcional explícita da força gravitacional ($\propto \frac{1}{r^2}$) e não são verdadeiras para ~~outras~~ forças com dependência em r diferente desta.

3.5 Momento angular de sistema de partículas

Considere sistema formado por N partículas, $\alpha = 1, 2, \dots, N$, com todos os \vec{r}_α referidos à mesma origem O . Definimos o momento angular total do sistema \vec{L} por

$$\vec{L} = \sum_{\alpha=1}^N \vec{\ell}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^N \vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha \quad \text{de um referencial inercial}$$

Sua taxa de variação é

$$\dot{\vec{L}} = \sum_{\alpha} \dot{\vec{\ell}}_\alpha = \sum_{\alpha} \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha \quad \text{(força resultante sobre a partícula } \alpha \text{)}$$

torque resultante sobre o sistema

Mas posso separar \vec{F}_α em

$$\vec{F}_\alpha = \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{F}_{\alpha\beta} + \vec{F}_\alpha^{\text{ext}}$$

↳ força que β faz em α

$$\begin{aligned}
 \text{Então, } \dot{\vec{L}} &= \sum_{\alpha} \sum_{\beta \neq \alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \\
 &= \sum_{\alpha} \sum_{\beta > \alpha} (\vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha\beta} + \vec{r}_{\beta} \times \vec{F}_{\beta\alpha}) + \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \\
 &= \sum_{\alpha} \sum_{\beta > \alpha} (\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}) \times \vec{F}_{\alpha\beta} + \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \\
 &\quad (\text{já que } \vec{F}_{\beta\alpha} = -\vec{F}_{\alpha\beta}, 3^{\text{a}} \text{ lei})
 \end{aligned}$$

Se as forças internas forem centradas (ou: se a 3ª lei é válida na forma forte), então $\vec{r}_{\alpha} - \vec{r}_{\beta}$ é paralelo a $\vec{F}_{\alpha\beta}$ e ~~o 1º termo é nulo~~ o 1º termo é nulo

$$\Rightarrow \dot{\vec{L}} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} = \dot{\vec{L}}^{\text{ext}} \quad (\text{torque externo resultante})$$

Portanto,

Se o torque externo resultante sobre um sistema de (N) partículas é nulo, seu momento angular total $\vec{L} = \sum_{\alpha} \vec{L}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{p}_{\alpha}$ é conservado (é constante).

Este é o princípio da conservação do momento angular (pressuposto: forças internas obedecem à 3ª lei na forma forte - isto é, são centradas)

Momento de inércia: Antes de mostrar exemplos, vale notar que nem sempre precisamos calcular o momento angular total através de sua definição.

Para um corpo rígido rodando em torno de um eixo fixo, por exemplo, o 'atalho' é exprimir aquela soma complicada em termos do momento de inércia e da velocidade angular de rotações. Se tomarmos o eixo de rotações como o eixo z , L_z (a componente z de \vec{L}) é igual a $I\omega$, onde I é o momento de inércia do corpo em relação a aquele eixo e ω é a velocidade angular de rotações (veja problema da Lista 4)

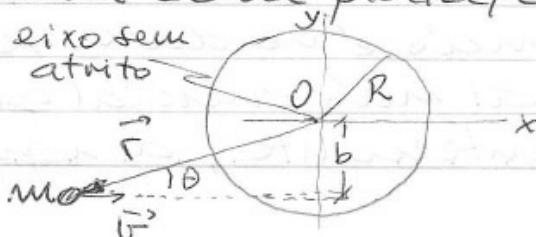
Momentos de inércia de objetos simples:

- disco uniforme girando em torno de seu eixo : $\frac{1}{2} MR^2$
- esfera uniforme (sólida), girando em torno de um diâmetro : $\frac{2}{5} MR^2$

O caso geral, para qualquer sistema de (N) partículas, é

$$I = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} r_{\alpha}^2 \quad (r_{\alpha}: \text{distância na perpendicular da partícula } \alpha \text{ ao eixo de rotações})$$

Exemplo: colisão de bola de massa m modelar com plataforma giratória



M : massa de plataforma
 b : parâmetro de impacto

Encontrar ω do conjunto depois da colisão.

Como não há atrito no eixo de rotação, $\Sigma_z^{\text{ext}} = 0$ sobre o sistema ($m\vec{g} \parallel \hat{z}$),

L_z é conservado

No início, só a massa de modelar contribui $l_z = (\vec{r} \times \vec{p})_z$;

$$L_z^{\text{ini}} = l_z = r(mv) \sin \theta = m v b$$

Depois da colisão, formam um "aglomerado" rígido, e $I = mR^2 + \frac{1}{2}MR^2$

$$L_z^{\text{fin}} = I\omega = \left(m + \frac{M}{2}\right)R^2\omega, \text{ e}$$

$$m v b = \left(m + \frac{M}{2}\right)R^2\omega \Rightarrow \omega = \frac{m}{m + \frac{M}{2}} \cdot \frac{v b}{R^2}$$

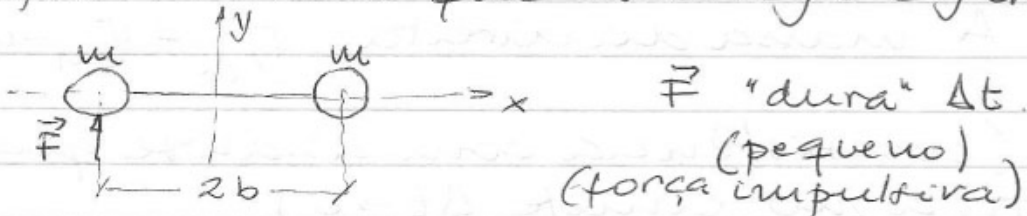
O interessante é que obtivemos a solução com pouquíssimo esforço! Isto é típico de situações onde podemos aplicar leis de conservação.

Momento angular em relação ao CM:

$\vec{L} = \vec{\Sigma}_{\text{ext}}$ foi demonstrada na hipótese de que todas as quantidades eram medidas em um (mesmo) referencial inercial, e não é verdade se usamos um referencial não inercial qualquer. Surpreendentemente, a igualdade

ou girando
 de acima é válida se a origem for o CM do sistema, mesmo que ele esteja acelerado em relação a um referencial inercial! (demonstração virá + tarde).

Exemplo: halteres que escorrega e gira



Descrever o movimento subsequente.

Parte 1: movimento inicial, imediatamente depois do impulso

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \vec{F}$$

$$\text{O CM: } \vec{P} = \vec{F} \Rightarrow \Delta \vec{P} = \vec{P} = \underbrace{\vec{F} \cdot \Delta t}_{\text{impulso}} = (2m) \vec{R}$$

$$\Rightarrow \vec{R} \text{ (do CM)} = \vec{v}_{\text{CM}} = \frac{\vec{F} \cdot \Delta t}{2m}$$

Enquanto \vec{F} atua: $\vec{\tau}^{\text{ext}} = \vec{r} \times \vec{F}$ e, em relação ao CM, $\vec{\tau}^{\text{ext}} = -Fb \hat{z}$, e

$$\Delta \vec{L} = \vec{L}_{\text{fin}} = \underbrace{\vec{\tau} \cdot \Delta t}_{\text{impulso angular}} = -Fb \Delta t \hat{z}, \text{ e}$$

$$Fb \Delta t = I \omega = 2mb^2 \omega \Rightarrow \omega = \frac{F \Delta t}{2mb}$$

girando no sentido anti-trigonométrico ($\vec{\omega} = -\frac{F \Delta t}{2mb} \hat{z}$)

Massa da esquerda: move-se, em

relação ao CM, com velocidade ωb no sentido $+y$, e sua velocidade (em relação ao laboratório) é

$$\begin{aligned} v_{\text{esq}} &= v_{\text{CM}} + \omega b = \frac{F\Delta t}{2m} + \frac{F\Delta t}{2mb} \cdot b \\ &= \frac{F\Delta t}{m} \end{aligned}$$

A massa da direita: $v_{\text{dir}} = v_{\text{CM}} - \omega b = 0$

(consistência com análise qualitativa no limite $\Delta t \rightarrow 0$)

Parte 2: movimento subsequente

Depois de decorrido Δt , $\vec{F}_{\text{ext}} = \vec{D}_{\text{ext}} = 0$

⇓

CM se move no sentido $+y$ com v_{CM} constante; (cons. mom. linear);

halteres continua girando com ω constante em relação ao CM (cons. mom. angular).

Velocidade da massa m quando halteres $\parallel \hat{y}$ no laboratório?