

# MECÂNICA GERAL - 1/2017

## LISTA 8

1. Em um certo problema unidimensional, a energia potencial de uma massa  $m$  a uma distância  $x$  da origem é dada por

$$U(r) = U_0 \left( \frac{x}{R} + \lambda^2 \frac{R}{x} \right)$$

onde  $0 < x < \infty$  e  $U_0$ ,  $R$  e  $\lambda$  são constantes positivas.

- (a) Encontre a posição de equilíbrio  $x_0$ .
- (b) Chame de  $h$  a distância a partir do equilíbrio e use a expansão de Taylor de  $U(x_0 + h)$  até segunda ordem para mostrar que, para pequenos valores de  $h$ ,  $U(h) = \text{constante} + 1/2kh^2$ .
- (c) Qual a frequência angular de pequenas oscilações deste sistema?

2. Uma mola de massa desprezível é suspensa do teto. Nesta posição, uma massa é presa a sua extremidade livre e abandonada a partir do repouso. O movimento é criticamente amortecido, e a posição final de repouso da massa está  $0,5m$  abaixo da posição de onde ela foi abandonada. Qual a distância a que ela se encontra desta posição final de equilíbrio  $1s$  após ser abandonada?

3. Um oscilador sem amortecimento tem período  $\tau_0 = 1s$ . Quando sofre um amortecimento fraco, a amplitude de suas oscilações decresce para a metade em um período  $\tau_1$ . Exprima  $\beta$  em função de  $\omega_0$ , a frequência angular do oscilador sem amortecimento, e determine  $\tau_1$ .

4. Um sistema massa-mola, de frequência natural  $\omega_0$ , é submetido a duas experiências de relaxação semelhantes em meios viscosos diferentes. A experiência consiste em puxar a mola até que tenha uma deformação  $x_0$  e então soltá-la e acompanhar o movimento resultante. Um dos meios (1) promove amortecimento crítico e o outro (2) produz uma força de arrasto com coeficiente duas vezes maior que o primeiro.

- (a) Escreva a solução completa do problema nos dois casos.
- (b) Determine, como função do tempo, a razão entre as velocidades atingidas pelo sistema nas duas experiências  $v_1(t)/v_2(t)$ . Analise o valor desta razão para pequenos valores de  $t$  até segunda ordem e determine se ela é maior ou menor que 1 neste caso.

5. De um modo geral, o integrando  $f(y, y', x)$  cuja integral queremos minimizar depende de  $y$ ,  $y'$  e  $x$ . Quando  $f$  é independente de uma destas variáveis, o problema pode se simplificar bastante. Nestes casos, podemos encontrar com facilidade uma constante de movimento, chamada neste contexto de uma **primeira integral** das equações de Euler-Lagrange. Esta primeira integral reduz o problema, que em geral é traduzido por uma equação diferencial de  $2^a$  ordem, numa equação de  $1^a$  ordem, mais fácil de resolver.

- (a) Suponha que  $f = f(y', x)$  não dependa de  $y$ . Prove que, neste caso, a equação de Euler-Lagrange se reduz a

$$\partial f / \partial y' = \text{constante}$$

Na mecânica Lagrangeana, veremos que esta simplificação ocorre sempre que uma componente do momento se conserva.

- (b) Suponha agora que  $f = f(y, y')$  não dependa da variável independente  $x$ . Prove que, neste caso,

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y''.$$

Em seguida, use a equação de Euler-Lagrange para substituir  $\partial f/\partial y$  do lado direito e mostre portanto que

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} \left( y' \frac{\partial f}{\partial y'} \right).$$

Prove que este resultado nos dá imediatamente uma primeira integral dada por

$$f - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = \text{constante}.$$

Este resultado pode simplificar muitos cálculos. Na mecânica Lagrangeana, onde a variável independente é o tempo  $t$ , o resultado correspondente a este é que, se a função Lagrangeana for independente de  $t$ , então a energia é conservada.