MECÂNICA GERAL - 1/2017

LISTA 10

1. Escreva a Lagrangeana para um cilindro de massa m, raio R e momento de inércia I que rola sem deslizar sobre um plano inclinado de um ângulo α com relação à horizontal. Use a distância percorrida pelo cilindro a partir do ponto mais alto do plano (oriente um eixo x para baixo ao longo da rampa) como coordenada generalizada. Obtenha a equação de Lagrange e resolva-a para achar a aceleração do centro de massa do cilindro $\ddot{x}$. Lembre que $T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$, onde v é a velocidade do centro de massa do cilindro e ω é sua velocidade angular.

2. Use o método Lagrangeano para obter a aceleração da máquina de Atwood levando em conta o momento de inércia da roldana I. Lembre que a energia cinética da roldana é $\frac{1}{2}I\omega^2$, onde ω é sua velocidade angular.

3. Escreva a Lagrangeana para um pêndulo simples de comprimento l, suspenso do teto de um elevador que acelera para cima com aceleração constante a. (Tome cuidado ao escrever a energia cinética; é mais seguro escrever a velocidade em termos das componentes cartesianas primeiro). Obtenha as equações de Lagrange e mostre que elas são iguais às do pêndulo simples sem aceleração, exceto pelo fato de que g deste último é substituído por $g + a$. Mostre que a frequência de pequenas oscilações é $\sqrt{(g + a)/l}$.

4. Considere dois objetos de massas m_1 e m_2 que se movem num campo gravitacional uniforme $\vec{g}$ e interagem através de uma energia potencial $U(r)$.
(a) Mostre que a Lagrangeana deste sistema pode ser decomposta em duas parcelas, uma ligada ao movimento do centro de massa (CM) do sistema e outra à posição relativa $\vec{r}$.
(b) Escreva as equações de Lagrange para as coordenadas do CM X, Y e Z e descreva o movimento do CM.
(c) Escreva as equações de Lagrange para as coordenadas relativas e mostre que o movimento de $\vec{r}$ é o mesmo que o de uma partícula de massa igual à massa reduzida μ, com posi cc̃ao $\vec{r}$ e energia potencial $U(r)$.

5. (a) Analise a energia potencial efetiva obtida para o problema de dois corpos sob a ação de uma força central conservativa e determine o raio da órbita circular possível para um planeta (ou cometa) de momento angular ℓ. (Sugestão: olhe para dU_{ef}/dr.)
(b) Mostre que esta órbita circular é estável, no sentido que qualquer pequena perturbação radial provocará apenas pequenas oscilações radiais (olhe para d^2U_{ef}/dr^2.) Mostre que o período destas oscilações é igual ao período orbital do planeta.

6. Um satélite da Terra é observado em seu perigeu a uma altura de $250km$ acima da superfície terrestre e com uma velocidade de $8500m/s$. Determine a excentricidade de sua órbita e sua altura acima da superfície terrestre no apogeu. O raio da Terra é $R_T \approx 6,4 \times 10^6 m$. Você também vai precisar do produto GM_T mas este é fácil de determinar se você lembrar que $GM_T/R_T^2 = g$.

7. Este problema é um DESAFIO, e não é obrigatório. Mas se você o resolver ganhará um sorriso meu! E um bônus na nota final...
Considere o problema bem conhecido de um carrinho de massa m que se move sem atrito sobre o eixo x ligado à extremidade de uma mola de constante elástica k cuja outra extremidade está presa. Se desprezarmos a massa da mola, como sempre fazemos, sabemos que o carrinho vai executar um movimento harmônico simples (MHS) com frequência angular $\omega = \sqrt{k/m}$. Usando a formulação lagrangeana podemos levar em conta o efeito da massa M da mola da seguinte forma:
(a) Suponha que a massa da mola esteja uniformemente distribuída e que ela se distenda também uniformemente e prove que a energia cinética da mola é $\frac{1}{6}M\dot{x}^2$, onde x é a distensão da mola a partir de sua poside equilíbrio. Escreva a Lagrangeana do sistema. (A energia potencial continua sendo $\frac{1}{2}kx^2$).
(b) Escreva as equações de Lagrange e mostre que o carrinho executa MHS com frequência angular $\omega = \sqrt{k/(m + M/3)}$ - isto é, o efeito da massa M da mola é simplesmente somar $M/3$ à massa do carrinho.