

A lei de Gauss



Prof. Fábio de Oliveira Borges

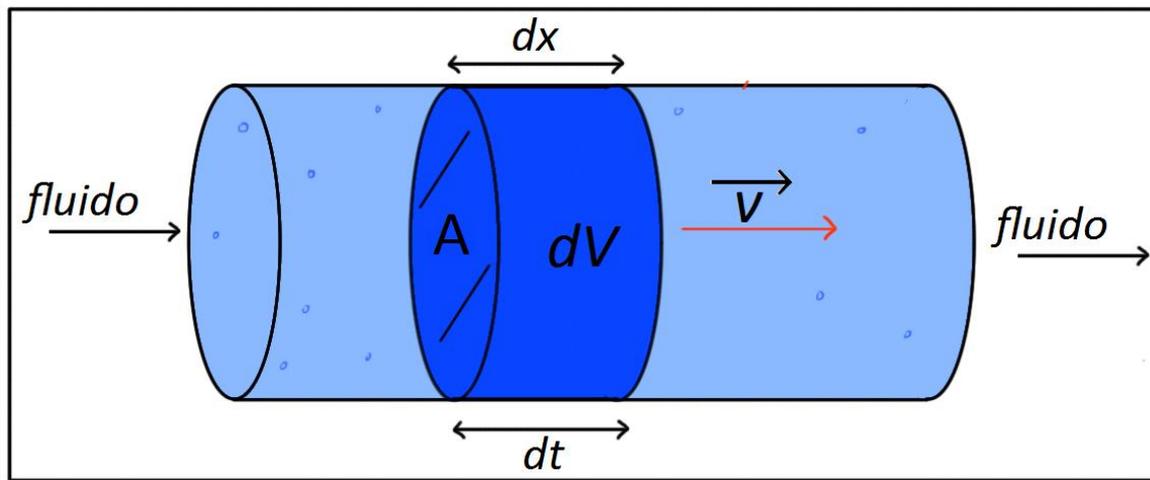
Curso de Física II

Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense
Niterói, Rio de Janeiro, Brasil

<https://cursos.if.uff.br/!fisica2-0217/doku.php>

Fluxo de um campo vetorial

Escoamento de um fluido em regime permanente



$$dV = A dx$$

$$\frac{dV}{dt} = A \frac{dx}{dt} = Av \quad \left[\frac{m^3}{s} \right]$$

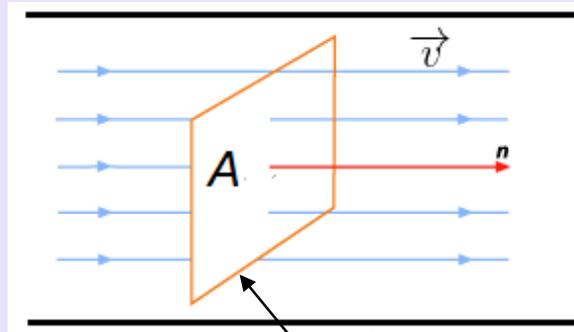
$$\Rightarrow \text{vazão} = A |\vec{v}|$$

Escoamento uniforme

Vetores velocidades são paralelos e com a mesma intensidade, direção e sentido ao longo do fluido.



Fluxo de um campo vetorial



tela retangular perpendicular
à direção de escoamento

$$\Phi = A |\vec{v}| \quad [m^3/s]$$

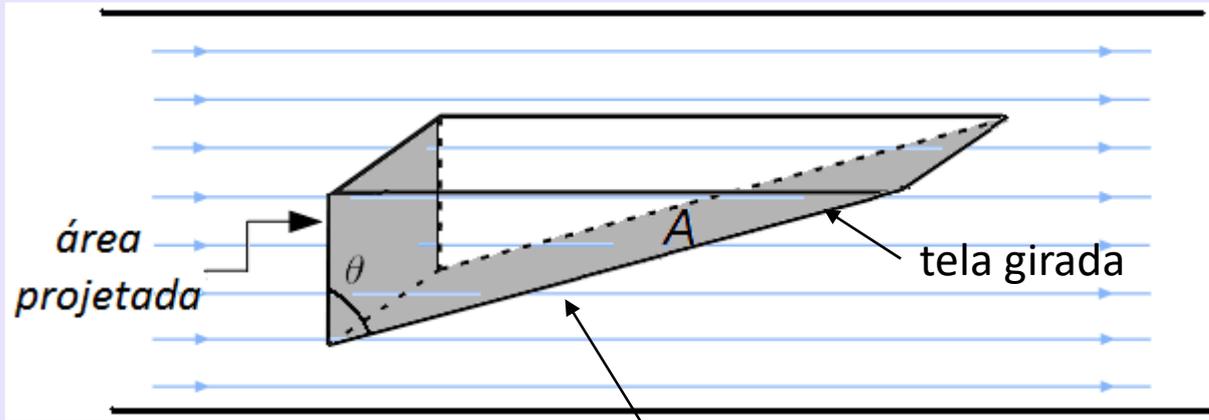


Fluxo do campo vetorial
de velocidade

Fluxo vetorial → medida do número de linhas de campo que atravessam a área da tela imaginária.



Fluxo de um campo vetorial

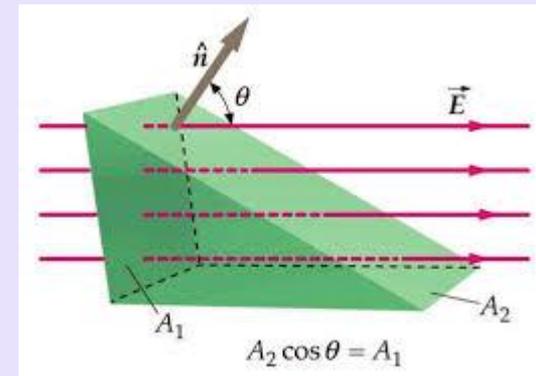


tela faz um ângulo com o vetor velocidade

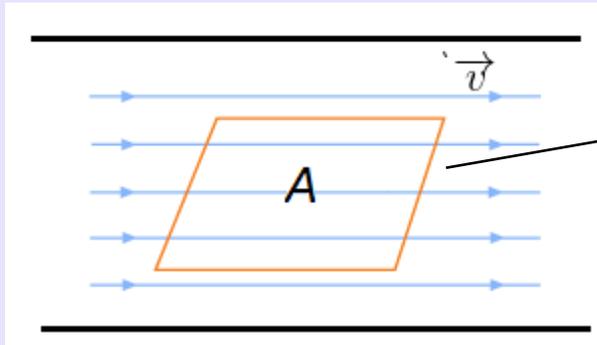
nº de linhas que atravessam a tela = nº de linhas que atravessam a área projetada $A \cos \theta$

$$\Rightarrow A \rightarrow A \cos \theta$$

$$\Rightarrow \Phi = |\vec{v}| A \cos \theta$$



Fluxo de um campo vetorial



tela paralela ao deslocamento

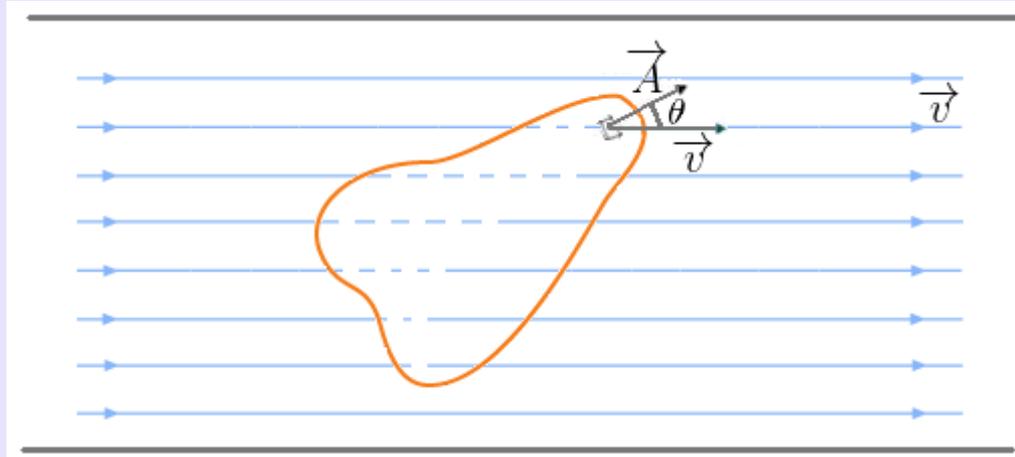
$$A // \vec{v} \Rightarrow \theta = 90^\circ \rightarrow \cos\theta = 0 \rightarrow \Phi = 0$$

não há linhas de campo
atravessando a tela



Fluxo de um campo vetorial

- Definindo um vetor área, \vec{A}



vetor \vec{A}

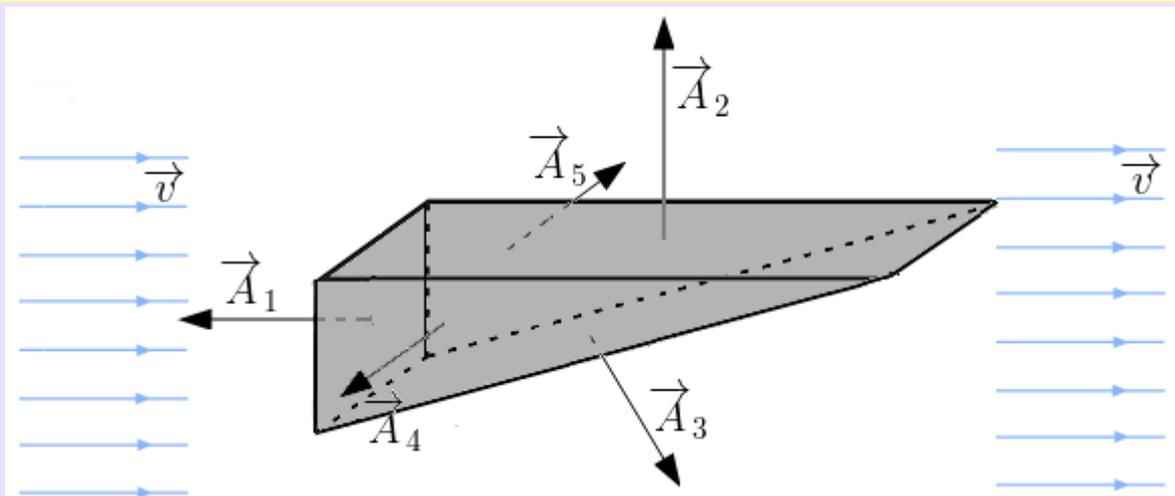
- módulo igual a área da superfície
- direção perpendicular a superfície
- sentido normal saindo da superfície

$$\Phi = vA \cos\theta = \vec{v} \cdot \vec{A}$$

Convenção: $\left\{ \begin{array}{l} \text{fluxo saindo da superfície} \rightarrow \text{positivo} \\ \text{fluxo entrando na superfície} \rightarrow \text{negativo} \end{array} \right.$



Fluxo para uma superfície fechada



$$\Phi = \sum \vec{v} \cdot \vec{A}$$

$$\Phi = \vec{v} \cdot \vec{A}_1 + \vec{v} \cdot \vec{A}_2 + \vec{v} \cdot \vec{A}_3 + \vec{v} \cdot \vec{A}_4 + \vec{v} \cdot \vec{A}_5$$

$$\vec{v} \cdot \vec{A} = |\vec{v}| |\vec{A}| \cos\theta$$

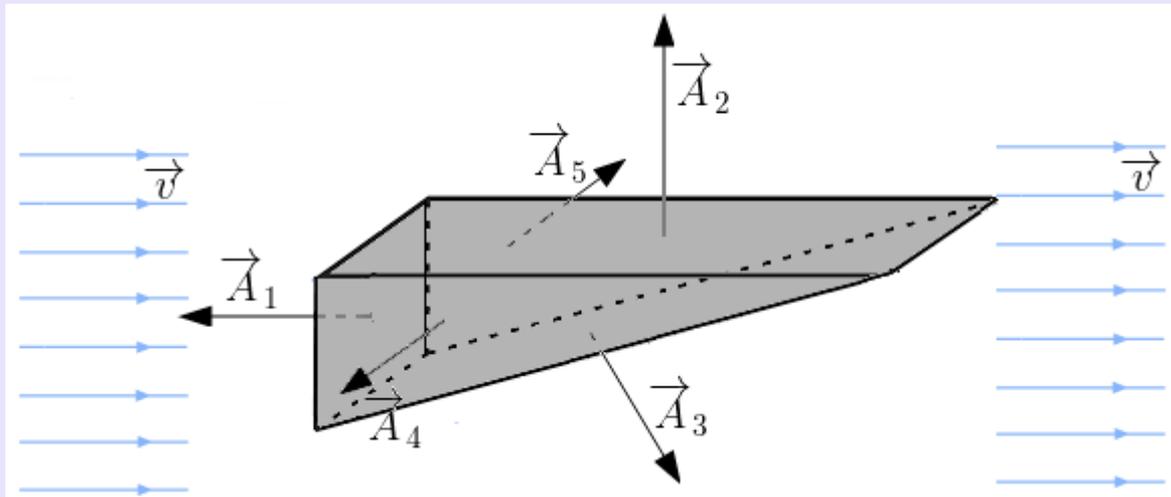
$$\vec{A}_2 \perp \vec{v} \Rightarrow \theta = 90^\circ \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{A}_2 = 0$$

$$\vec{A}_4 \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{A}_4 = 0$$

$$\vec{A}_5 \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{A}_5 = 0$$



Fluxo para uma superfície fechada



$$\vec{A}_1 // \vec{v} \Rightarrow \theta = 180^\circ \Rightarrow \cos\theta = -1 \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{A}_1 = -vA_1$$

$$\vec{A}_3 \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{A}_3 = v \underbrace{A_3 \cos\theta}_{A_1 \leftarrow \text{área projetada}} = +vA_1$$

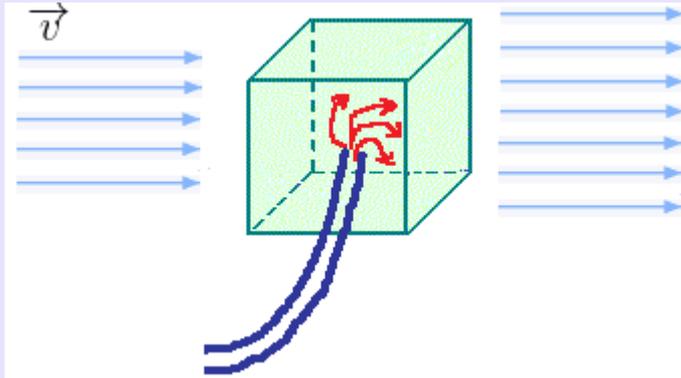
$$\Rightarrow \Phi = -vA_1 + 0 + 0 + 0 + vA_1$$

$$\Rightarrow \Phi = 0$$

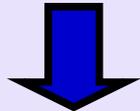
➡ O fluxo total sobre uma superfície fechada é nulo

Fontes e sumidouros

Fontes e sumidouros são locais onde os fluidos são criados ou escoados

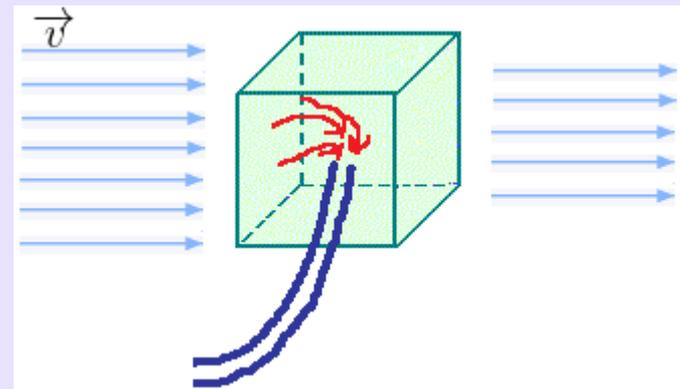


fonte



fluxo

positivo



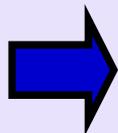
sumidouro



fluxo

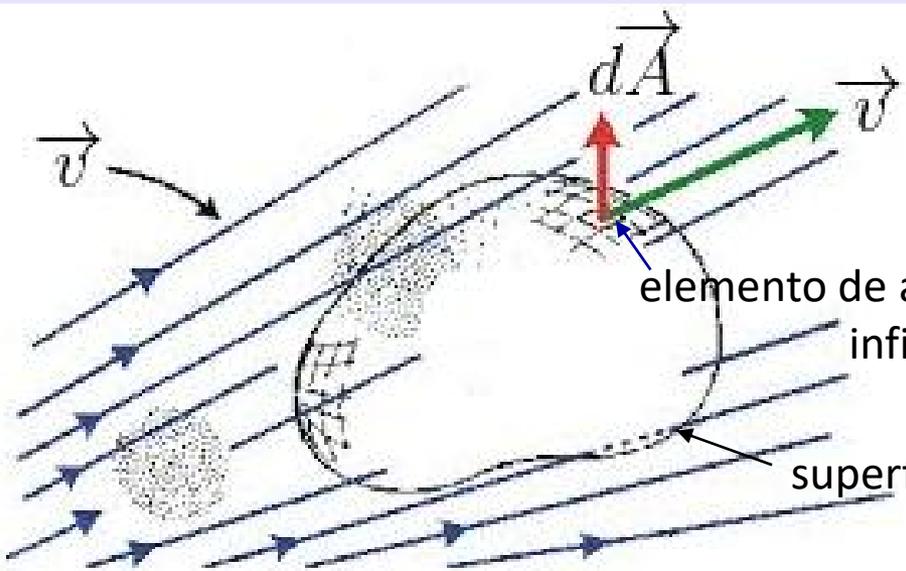
negativo

fonte +
sumidouro



O fluxo pode ser positivo, negativo ou nulo, depende da capacidade de cada um.

Generalização



$$\Phi = \oint \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

Superfície fechada

elemento de área
infinitesimal

superfície fechada
arbitrária

Em uma superfície fechada o fluxo é:

(1) nulo se a superfície não engloba nenhuma fonte ou sumidouro.

$$\mapsto \Phi = 0$$

(2) positivo se a superfície contiver fontes em seu interior.

$$\mapsto \Phi = \text{capacidades das fontes}$$

(3) negativo se a superfície contiver sumidouros em seu interior.

$$\mapsto \Phi = \text{capacidades dos sumidouros}$$



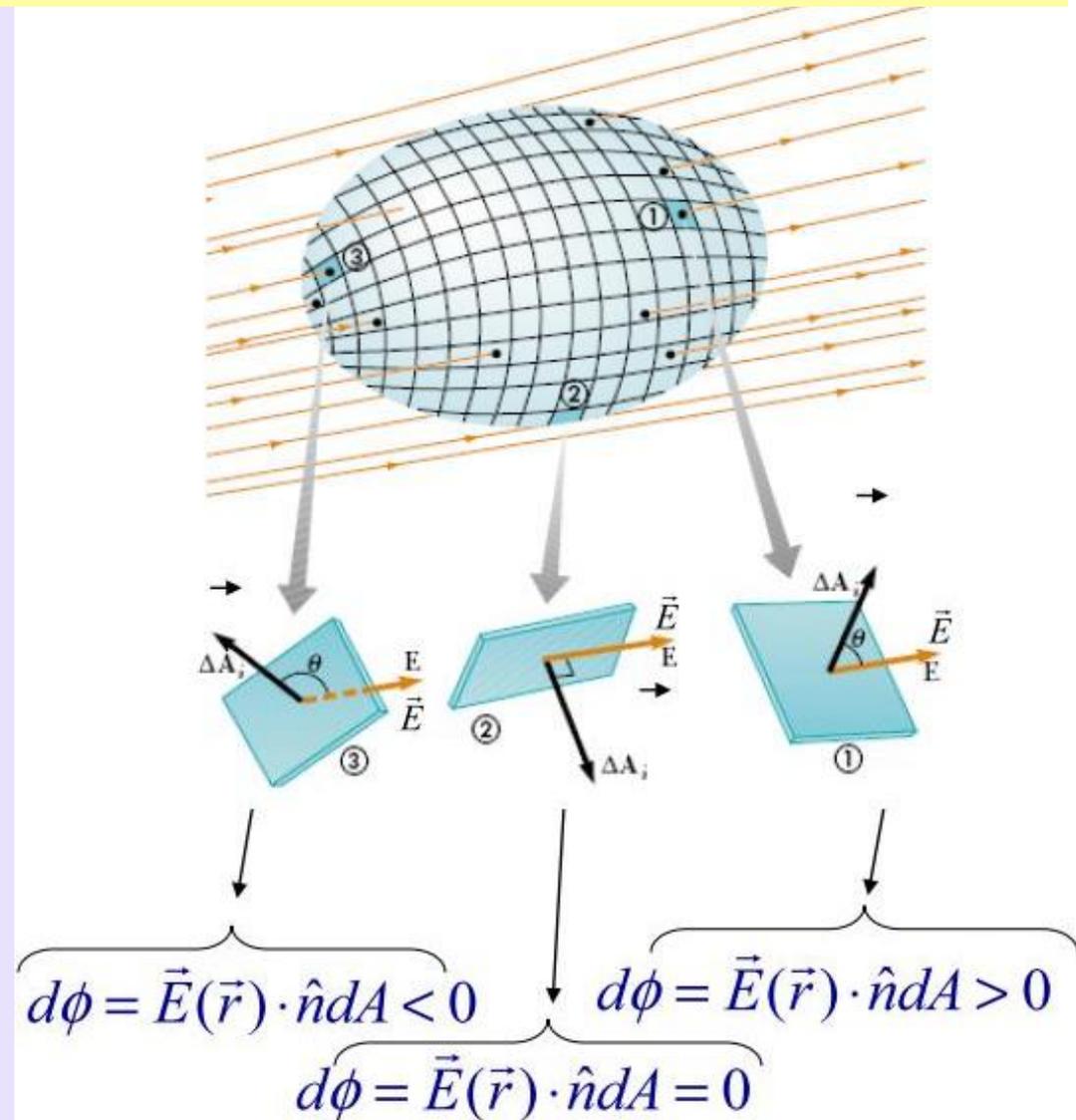
O fluxo do campo elétrico

campo de velocidades \Rightarrow campo elétrico

\vec{v} é substituído por \vec{E}

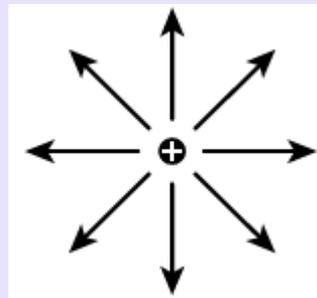
Por analogia:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

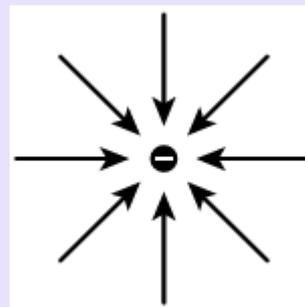


Identificação das fontes e sumidouros

Fonte de campo → carga positiva
elétrico



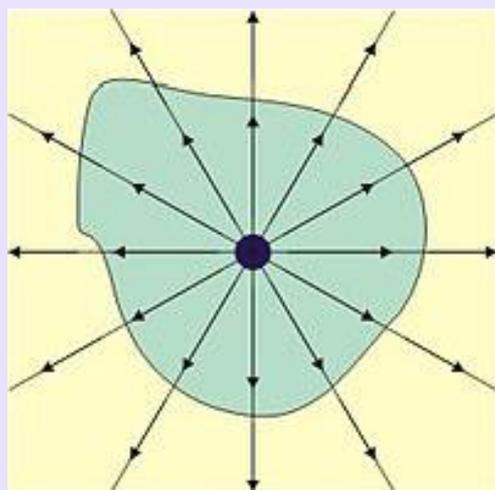
Sumidouro de campo → carga negativa
elétrico



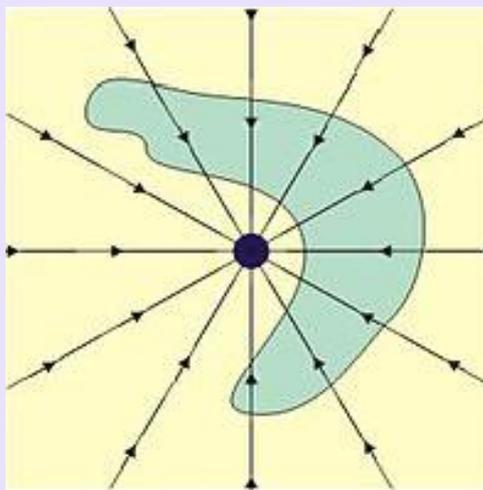
Fluxo de linhas de campo

Admita que cada unidade de carga, q , seja representada por um número específico de linhas de campo elétrico

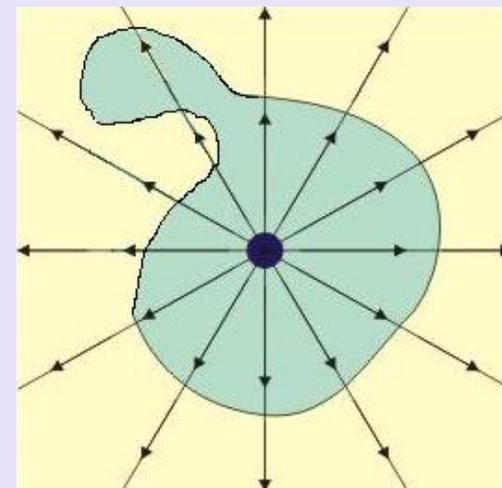
Ex: $\left\{ \begin{array}{l} +q (12C) \rightarrow 12 \text{ linhas apontando para fora} \\ -q (12C) \rightarrow 12 \text{ linhas apontando para dentro} \end{array} \right.$



$\Phi = 12$ linhas saindo



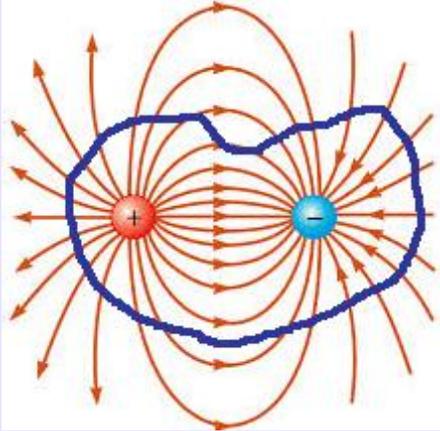
$\Phi = 8 - 8 = 0$



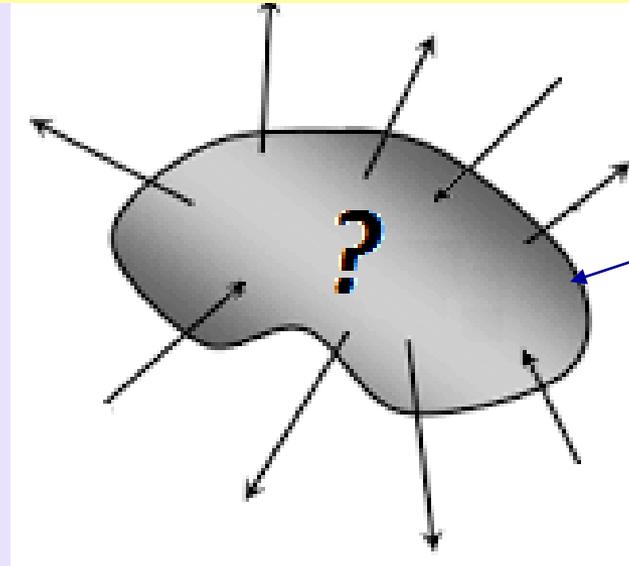
$\Phi = 12$ linhas saindo



Fluxo de linhas de campo



$$\Phi = 24 - 24 = 0$$



Superfície
qualquer

Qual é a carga interna a superfície?

$\Phi = 6$ linhas saindo – 3 linhas entrando

$\Rightarrow \Phi = 3$ linhas saindo



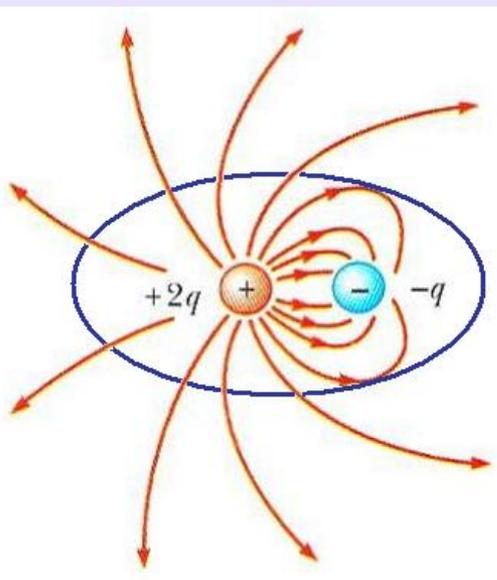
podemos afirmar que há uma carga líquida de $q = 3C$ dentro da superfície.

Concluimos que:

$$\Phi_E \propto q_{int}$$



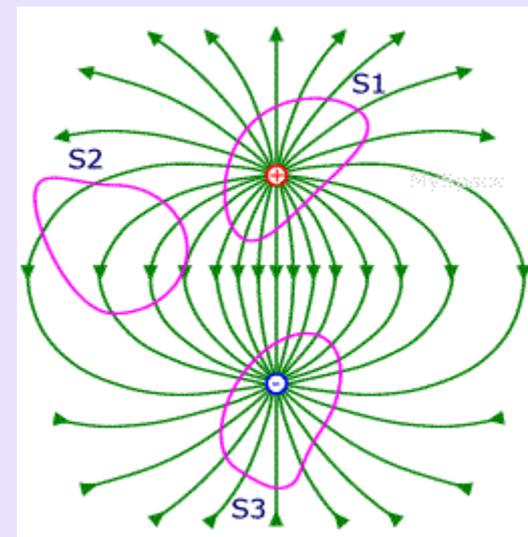
Fluxo de linhas de campo



Assim:



$$\Phi_E = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$



- O fluxo líquido através de qualquer superfície fechada que envolve uma carga q é dado por q_{int}/ϵ_0 .



A lei de Gauss

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \Phi_E = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} \rightarrow \text{Lei de Gauss}$$

A lei de Gauss afirma que o fluxo elétrico líquido, através de qualquer superfície gaussiana fechada, é igual à carga líquida no interior da superfície dividida por ϵ_0 .

superfície = qualquer superfície
gaussiana fechada



é escolhida pela simetria que a
distribuição de carga apresenta



A lei de Gauss e a lei de Coulomb

Força coulombiana sobre q_0



$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \hat{r}$$

Campo elétrico no ponto P



$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

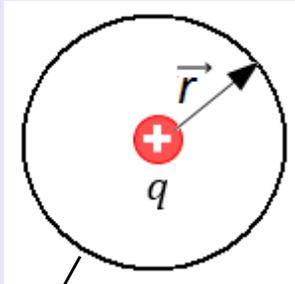
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{q}{\epsilon_0} \hat{r}$$

Área de uma esfera $\Rightarrow A = 4\pi r^2$



A lei de Gauss e a lei de Coulomb

esfera de raio r



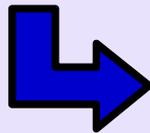
superfície gaussiana

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{q}{\epsilon_0} \hat{r}$$

$$|E| = \frac{1}{|A|} \frac{q}{\epsilon_0}$$

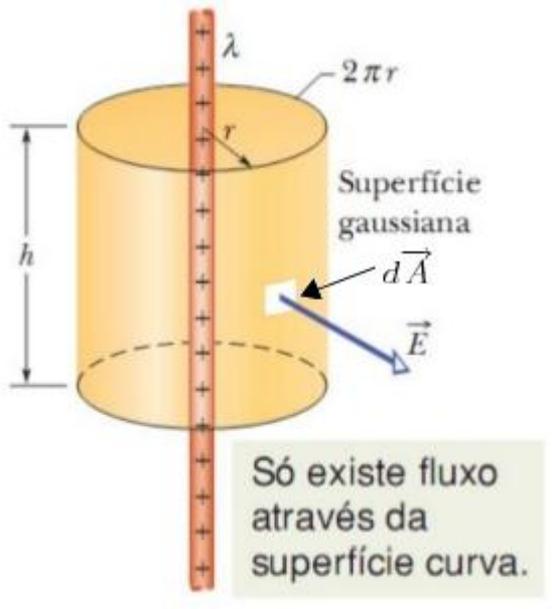
$$\Rightarrow \underbrace{|E||A|}_{\Phi_E} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$



A ideia da lei de Gauss está na equação experimental da lei de Coulomb.

Aplicação da lei de Gauss: fio infinito



Superfície gaussiana

→ Uma superfície imaginária construída com o fim específico de se calcular o campo elétrico pela aplicação da lei de Gauss. Sobre esta superfície o campo elétrico é constante.

Campo elétrico

→ Apresenta apenas componente radial \Rightarrow é uniforme sobre uma superfície cilíndrica.

Fluxo de \vec{E} através das bases

$$\vec{E} \perp d\vec{A} \Rightarrow \Phi_E = \int_{\text{base}} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$



Aplicação da lei de Gauss: fio infinito

Fluxo de \vec{E} através da lateral

$$\Phi_E = \int_{Lat.} \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \int_{Lat.} dA = EA = E(2\pi rh)$$

$$\vec{E} // d\vec{A}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = 1$$

campo uniforme sobre o cilindro

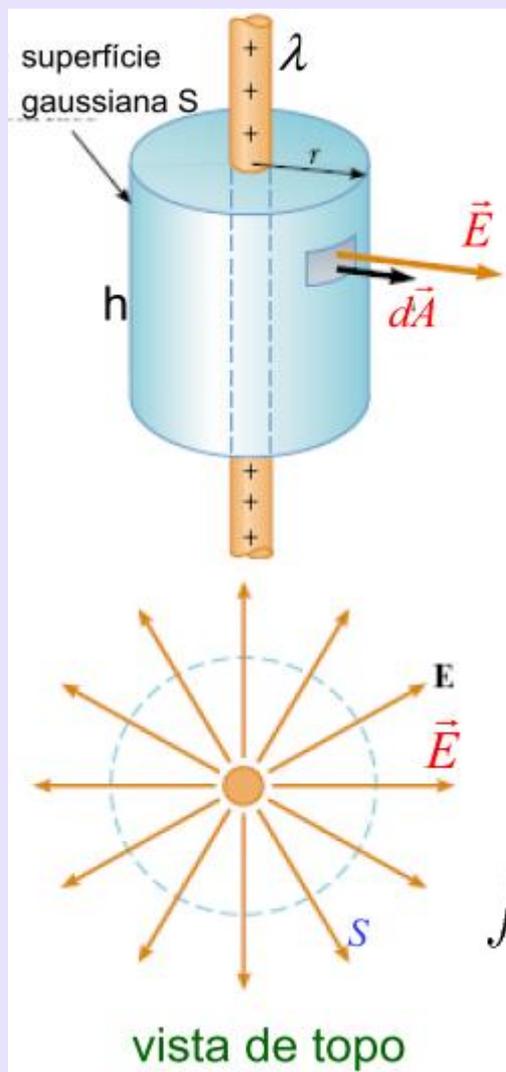
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}, \quad q_{int} = \lambda h$$

carga total dentro da superfície gaussiana

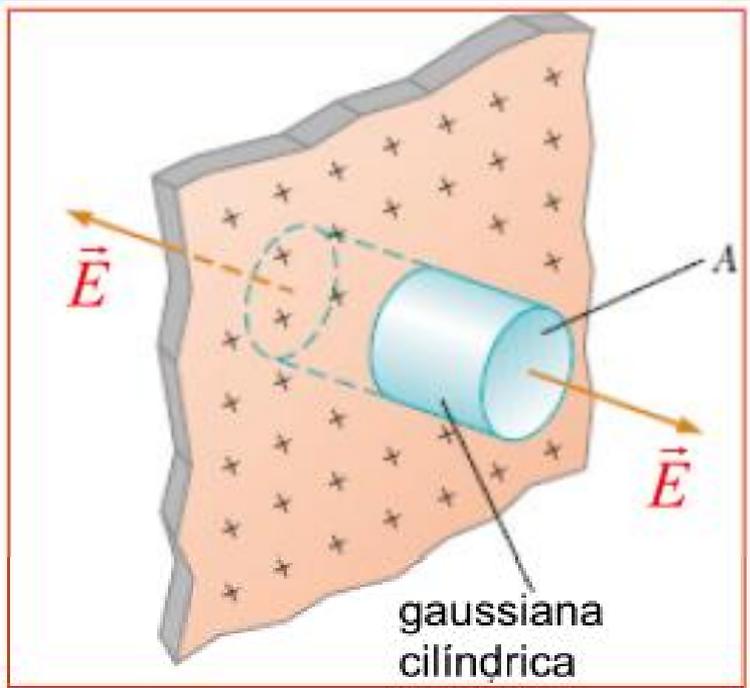
$$\int_{base} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{base} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{Lat.} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 + 0 + E(2\pi rh) = \frac{h\lambda}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(2\pi rh) = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

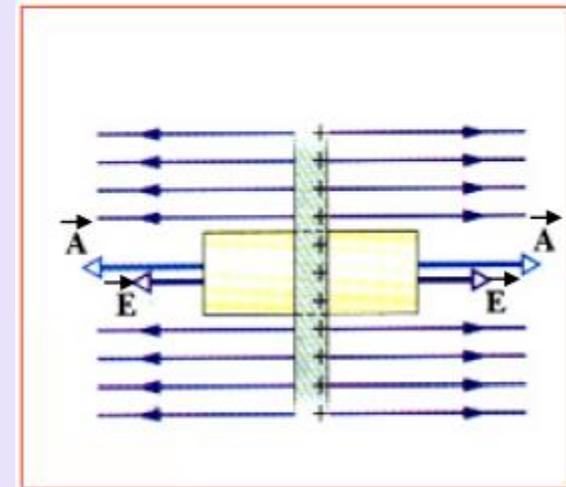


Aplicação da lei de Gauss: plano infinito



Campo elétrico

→ aponta para fora, perpendicular ao plano



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

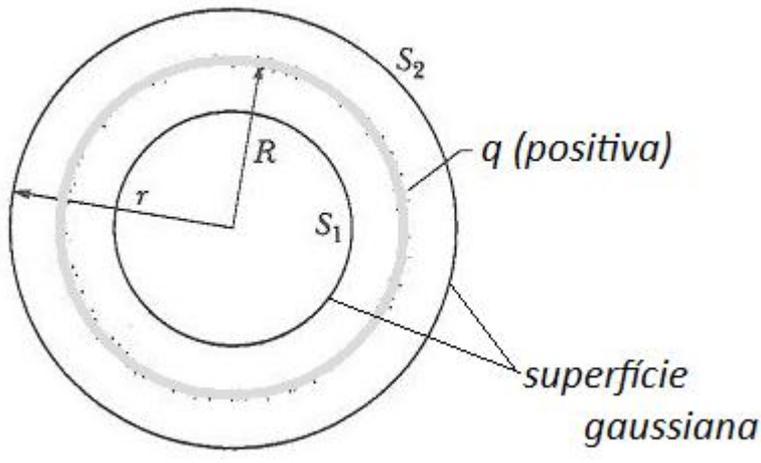
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{base} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{base} \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{Lat.} \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA + EA + 0 = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$(EA + EA) = \frac{\eta A}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\eta}{2\epsilon_0}$$



Aplicação da lei de Gauss: casca esférica



Campo elétrico

→ apresenta somente componente radial, e é uniforme sobre a esfera.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

superfície gaussiana S_1

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}; \quad q_{int} = 0$$

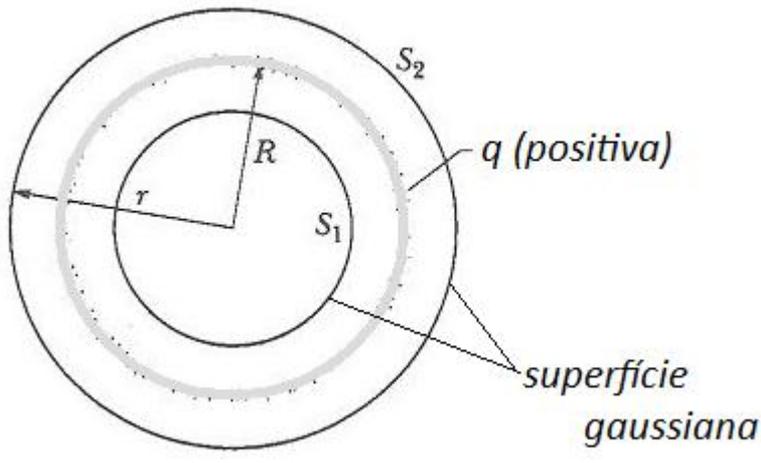
$$\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0; \quad \Rightarrow E = 0 \quad (r < R)$$

Teorema das cascas

1) “uma casca esférica uniforme carregada não exerce nenhuma força em uma partícula carregada localizada em seu interior”



Aplicação da lei de Gauss: casca esférica



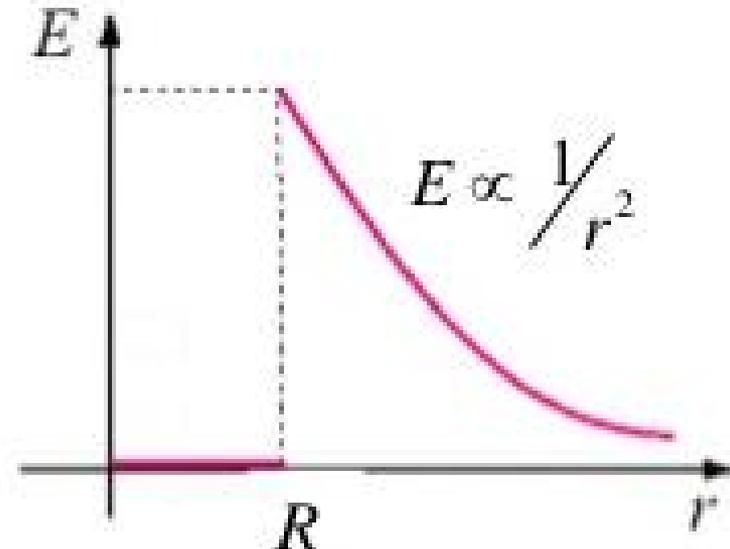
superfície gaussiana S_2

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}; \quad q_{int} = q$$

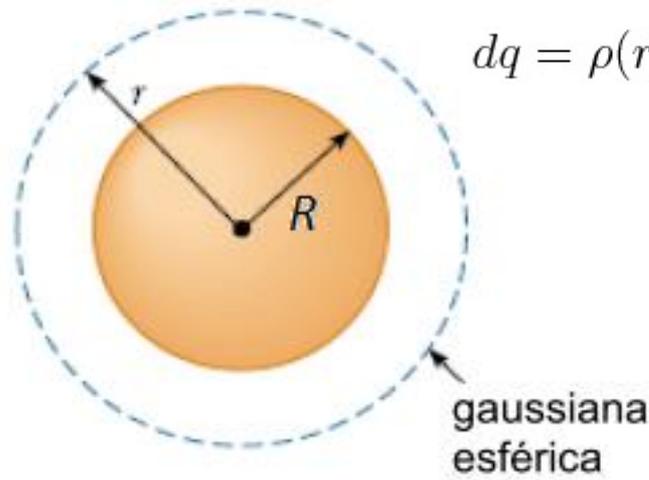
$$E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (r > R)$$

2) “uma casca esférica uniforme carregada comporta-se, para pontos externos, como se toda carga estivesse concentrada em seu centro.”



Distribuição de carga com simetria esférica



$$dq = \rho(r)dV$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$Q_{int} = \int_V dq = \int_V \rho(r)dV$$

$$\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} \underbrace{\int_V \rho(r)dV}_Q$$

$$\Rightarrow E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

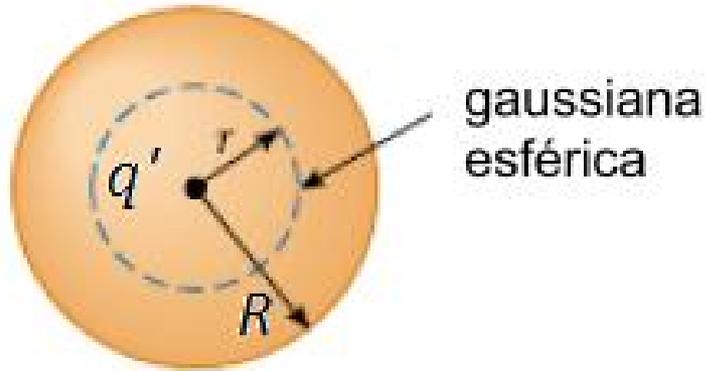
$$\Rightarrow E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (r > R)$$

$$\rho = C^{te} \text{ ou } \rho = \rho(r)$$

↳ Neste curso, ρ não vai depender das coordenadas angulares.



Distribuição de carga com simetria esférica



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

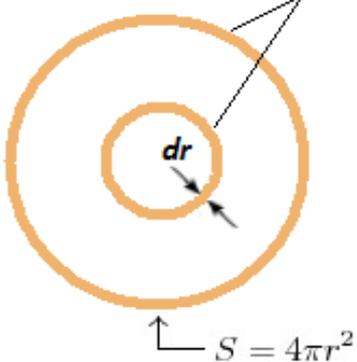
$$q_{int} = q' = \int dq' = \int_V \rho(r') dV \Rightarrow dV = ?$$

$$dV = \underset{\text{da casca}}{\text{área}} \times \underset{\text{da casca}}{\text{espessura}}$$

$$\Rightarrow dV = 4\pi r^2 \times dr$$

$$\Rightarrow q_{int} = q' = \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr' = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \quad \rho(r') = ?$$

somar várias cascas esféricas



para uma distribuição homogênea $\Rightarrow \rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{4\pi R^3/3}$

$$\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3} = C^{te}$$



Distribuição de carga com simetria esférica

$$\Rightarrow q' = 4\pi \int_0^r \frac{3Q}{4\pi R^3} r'^2 dr'$$

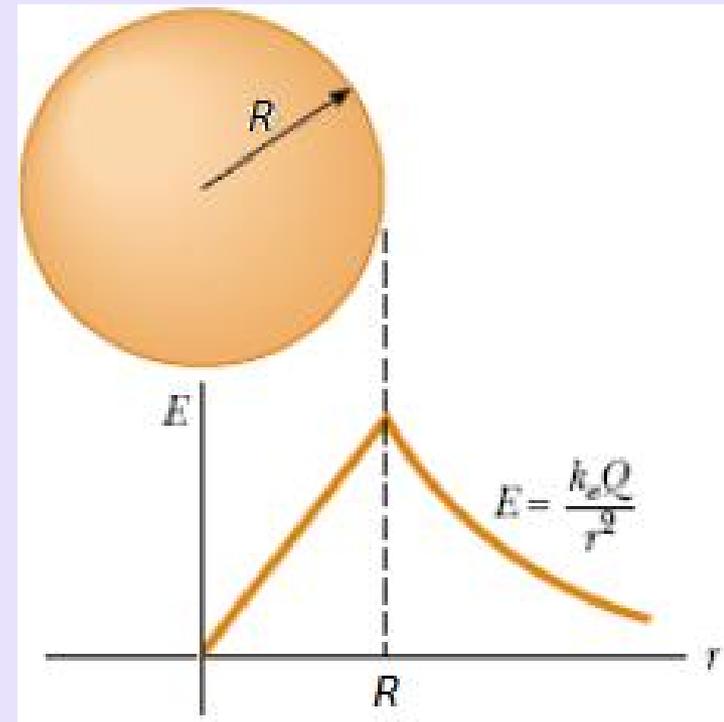
$$q' = \frac{3Q}{R^3} \int_0^r r'^2 dr' = \frac{Qr^3}{R^3}$$

logo

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

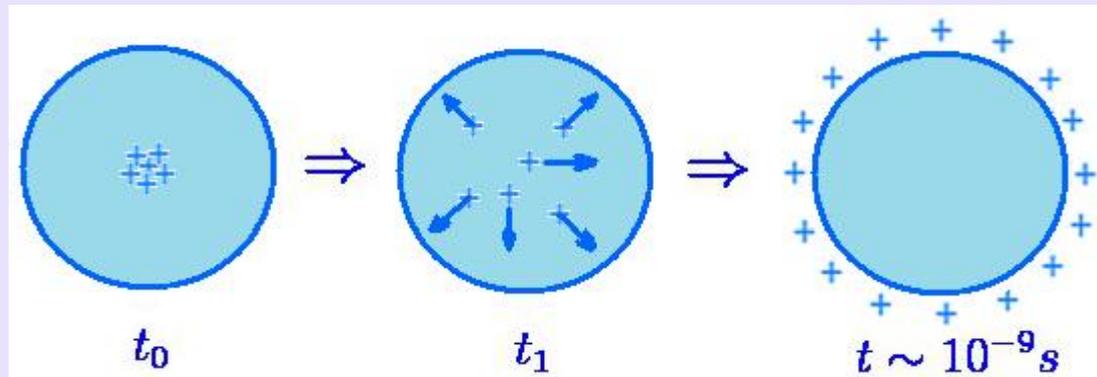
$$E(4\pi r^2) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Qr^3}{R^3}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3} \quad (r < R)$$



Condutores em equilíbrio eletrostático

- 1) Qualquer excesso de carga, num condutor isolado, deve estar, necessária e inteiramente, na superfície do condutor.

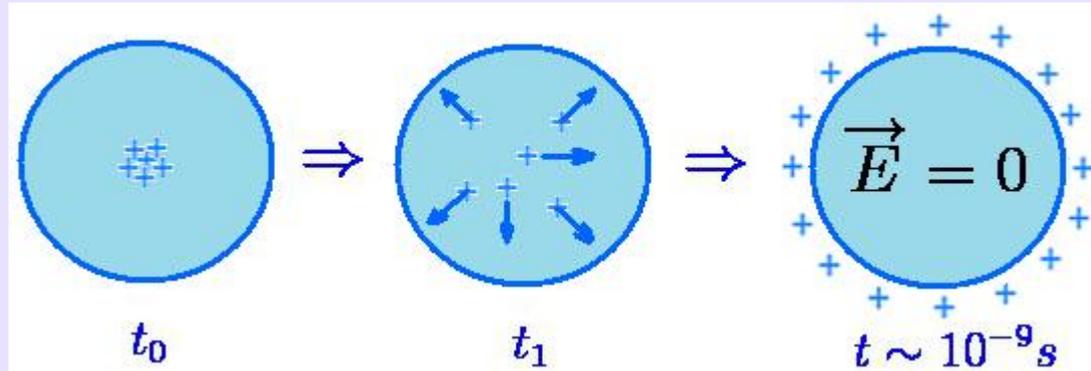


- Qualquer carga desbalanceada em um condutor em equilíbrio se distribui em sua superfície.

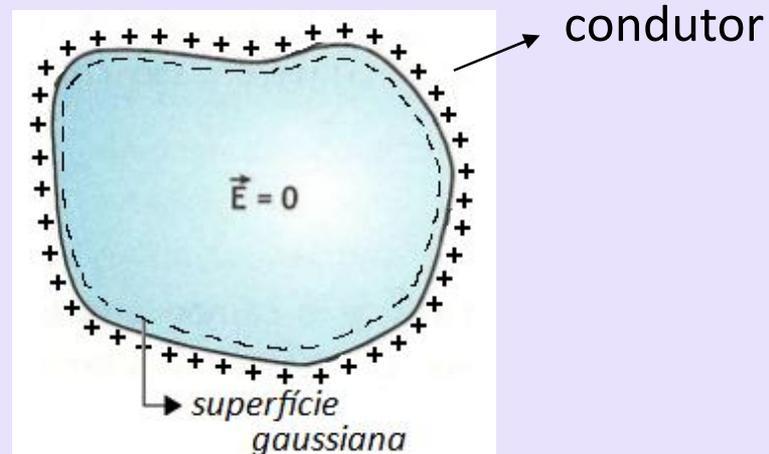


Condutores em equilíbrio eletrostático

2) O campo elétrico é nulo em qualquer ponto no interior de um condutor.



A carga se distribui de forma a anular o campo elétrico interior do condutor

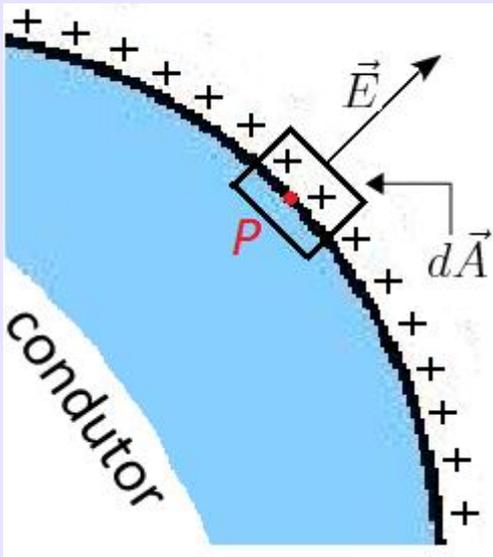


$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0; \quad q_{int} = 0$$



Condutores em equilíbrio eletrostático

3) O campo elétrico na face externa da superfície de um condutor é perpendicular à superfície do mesmo e tem módulo igual a η/ϵ_0 , onde η é a carga por unidade de área no ponto da superfície.



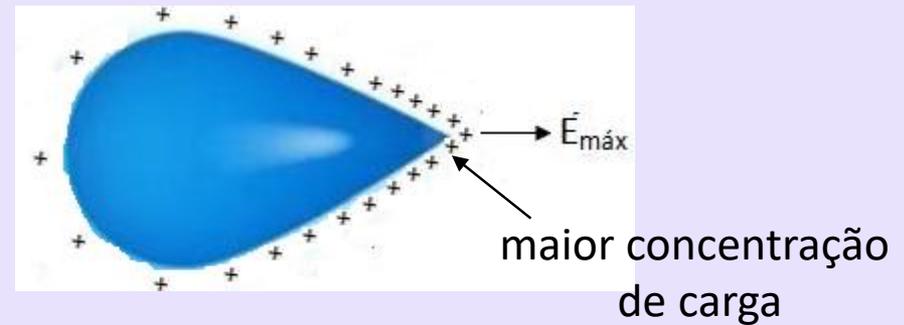
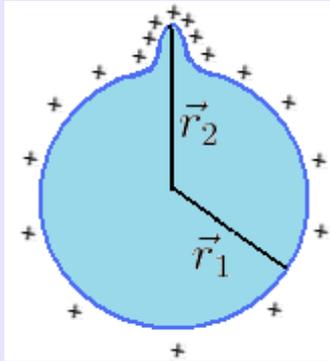
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA = \frac{q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\eta A}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\eta}{\epsilon_0}$$

- O campo elétrico tem que ser normal a superfície de um condutor para que não haja correntes sobre a superfície.



Condutores em equilíbrio eletrostático

4) Num condutor com forma irregular, a carga tende a se acumular nos locais onde o raio de curvatura da superfície é pequeno, isto é, onde a superfície é pontuda. (efeito das pontas)



$$\vec{r}_1 < \vec{r}_2 \quad E \propto \frac{1}{r^2}$$

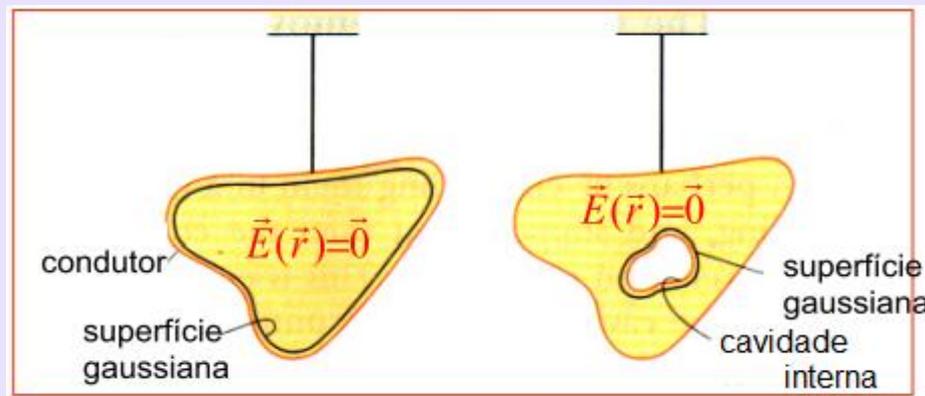
$$\Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2$$

$$\Rightarrow q_2 > q_1$$



Condutores em equilíbrio eletrostático

5) O campo elétrico no interior de um condutor em equilíbrio eletrostático é sempre nulo. Assim sendo, a lei de Gauss nos permite demonstrar que todo o excesso de carga no condutor deverá migrar para a sua superfície.



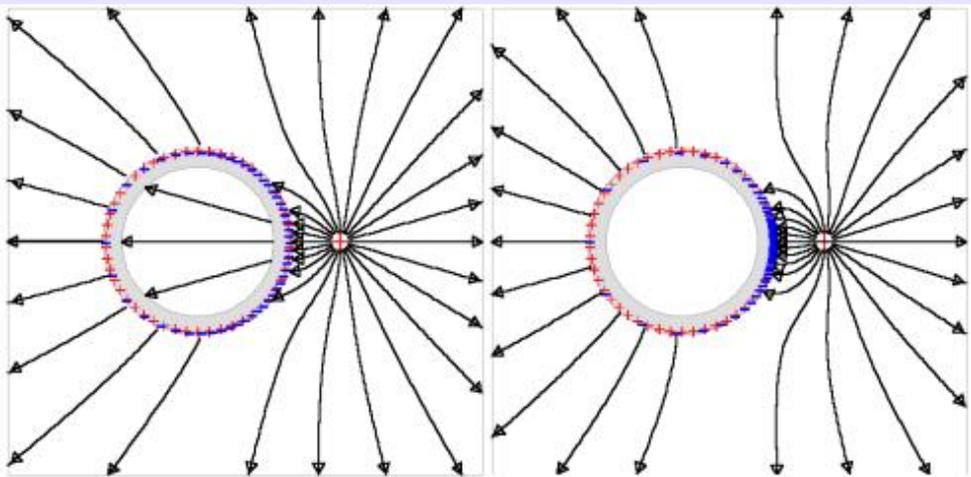
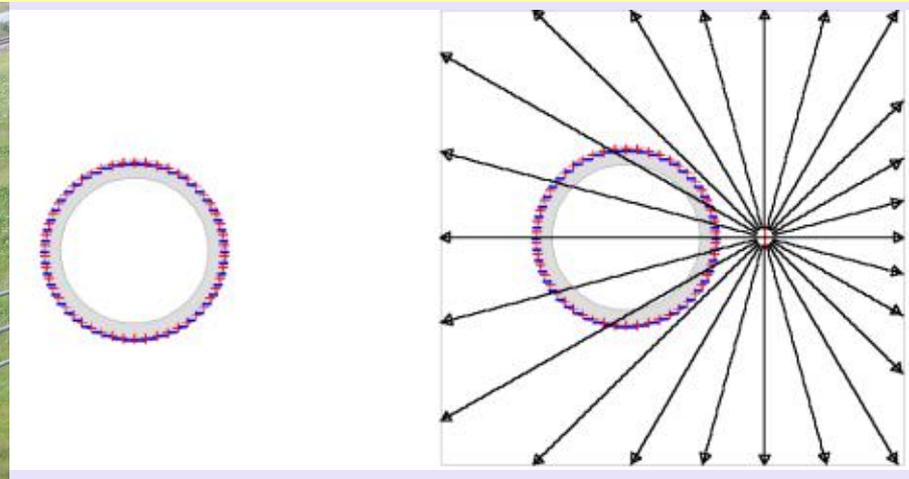
$\vec{E} = 0$ no interior do condutor

$$\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0 \Rightarrow q_{int} = 0$$

\Rightarrow Não pode haver carga dentro de uma cavidade localizada no interior de um condutor isolado.



Gaiola de Faraday



FIM

