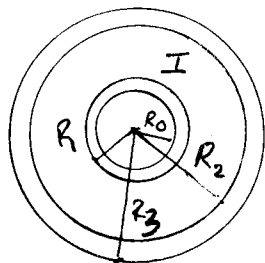


Princípio básico de funcionamento do gerador eletrostático van de Graaff.

Considere duas cascas esféricas condutoras



(*) Isto é uma consequência do fato das cascas serem condutoras (em equilíbrio) e da lei de Gauss.

1. Casca interna carregada com carga q_1 , e a casca externa descarregada.

A carga q_1 estará distribuída sobre a superfície de raio R_1 (superfície externa da casca interna)

O campo entre as cascas (região I) é dado por

$$E_I = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$R_1 < r < R_2$$

No equilíbrio eletrostático o campo no interior da casca externa ($R_2 < r < R_3$) deve ser nulo

$\Rightarrow$ Haverá uma redistribuição das cargas na casca externa de modo que na superfície de raio R_2 aparecerá uma carga $-q_1$. Por consequência, na superfície de raio R_3 aparecerá uma carga $+q_1$. Isto decorre do uso da lei de Gauss para superfícies

gaussianas de raio $R_2 < \rho < R_3$: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 = \frac{Q}{\epsilon_0}$ ②

onde Q é a carga contida no volume delimitado pela sup. Gaussiana. $Q = q_1 + q' \Rightarrow q' = -q_1$.

Por conservação de carga e levando em conta que originalmente a carga externa estava neutra,
 $\Rightarrow$ Se aparece uma carga $-q_1$ na sup. de raio R_2 ,
vai aparecer uma carga $+q_1$ na sup. de raio R_3 .

A d.d.p. entre R_1 e R_2 é dada por

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{R_1}^{R_2} \\ &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned}$$

Como $R_1 < R_2 \Rightarrow \frac{1}{R_1} > \frac{1}{R_2}$: Supondo $q_1 > 0$ temos

que $V_1 > V_2$. Se conectarmos as superfícies de raio

R_1 e R_2 por um fio condutor, a carga em R_1

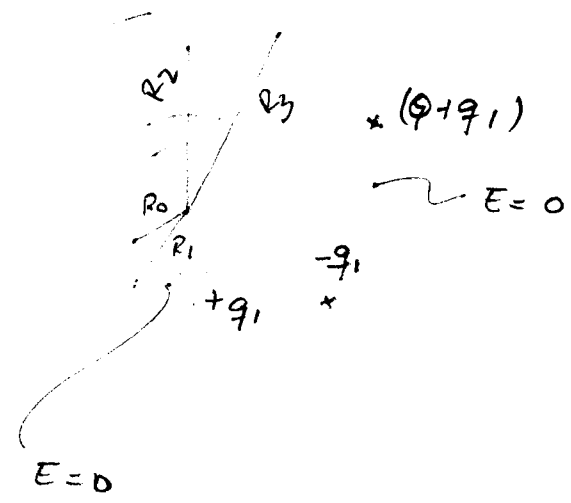
fluirá para R_2 . O excesso de carga na casca

externa terminará na sup. externa de raio R_3 .

no equilíbrio eletrostático

Isto pq o campo elétrico na região $R_2 < \rho < R_3$ deve ser nulo no equilíbrio eletrostático.

2. Suponha agora que a casca externa já tenha um excesso de carga Q e que a casca interna tenha um excesso de carga q_1 . Nesse caso, a distribuição de carga, no equilíbrio eletrostático será:



$+q_1$ na sup. de raio R_1
 $-q_1$ na sup. de raio R_2

$Q+q_1$ na sup. de raio R_2

A d.d.p. $V_1 - V_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$

(Basta repetir o mesmo raciocínio anterior)

Seendo assim, não importa se a casca externa já tenha um excesso de carga. Nessa situação, se conectarmos as superfícies de raios R_1 e R_2 com um fio condutor, fluirá carga de $R_1 \rightarrow R_2$ e o excesso de carga terminará (no equilíbrio eletrostático) na sup. mais externa de raio R_2 .

Repetir todo esse raciocínio supondo que a carga $q_1 < 0$.

o resultado final é o mesmo!

Visitem a Casa de Descobertas (situada no andar 2º)
para ver, inspecionar, brincar e ouvir as explicações
sobre o funcionamento do acelerador van de Graaff.

Capacitância e capacitores

Capacitor de placas planas e paralelas

$$d \begin{array}{c} \downarrow E = \sigma / \epsilon_0 \\ +Q = \sigma A \\ -Q = -\sigma A \end{array}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \Delta V = V_+ - V_- = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{\sigma A}{\epsilon_0 A} d$$

V

$$V = \frac{Qd}{\epsilon_0 A} \Rightarrow V \propto Q$$

Definimos capacitância $C = \frac{Q}{V}$

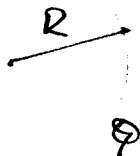
No caso $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$ Note que a capacitância

não depende nem de V nem de Q , apenas de
fatores geométricos e, veremos mais adiante da
permissividade elétrica (ϵ) do dielétrico existente
entre as "placas" do capacitor.

Unidade $1 \text{ Farad} = \frac{1 \text{ Coulomb}}{\text{Volt}}$

5

Capacitância de uma esfera condutora.



Potencial na sup. de esfera $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$

$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R \quad C \propto R$

aumenta com o raio da esfera.

$\epsilon = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 8.99 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2 \Rightarrow C \approx \frac{R}{9 \times 10^9} \left(\frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2} \right)$

Para que $C = 1 \text{ F} \Rightarrow R \approx 9 \times 10^9 \text{ m} = 9 \times 10^6 \text{ km}$

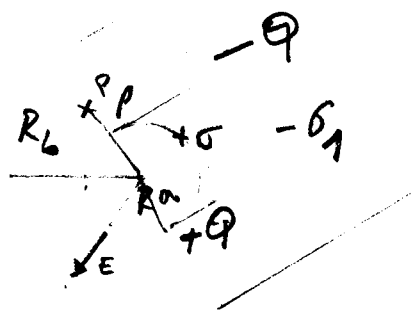
Raio da Terra $\approx 6 \times 10^3 \text{ km} !$

Para que a capacitância de um capacitor de placas planas e paralelas, separadas por uma distância $d \approx 1 \times 10^{-3} \text{ m}$ (1mm) seja 1F, a área das placas teria que ser de 100 km^2 a área de Niterói!
 $\approx 140 \text{ km}^2$

Os capacitores usuais são medidos em μF ou pF .
 $10^{-6} \text{ F} \quad 10^{-12} \text{ F}$

Capacitor cilíndrico

6



Dois cilindros coaxiais
de raios R_a e R_b

Campo elétrico no ponto

$$R_a < p < R_b$$

Densidades superficiais de carga $+\sigma$ e $-\sigma$,
respectivamente. Note que $\sigma_1 \neq \sigma$ para que as cargas
sejam $+Q$ e $-Q$ respectivamente.
Lei de Gauss

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} = E \cdot \underbrace{2\pi p L}_{\text{área da sup. Gaussiana}} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$Q = \sigma \cdot 2\pi R_a L \Rightarrow E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{2\pi R_a L}{2\pi p L} = \frac{\sigma R_a}{\epsilon_0 p}$$

A d.d.p. entre as superfícies de raios R_a e R_b
é dada por

$$V = V_+ - V_- = \int_+^- E \cdot dl = \frac{\sigma R_a}{\epsilon_0} \ln(p) \Big|_{R_a}^{R_b}$$

$$\Rightarrow V = \frac{\sigma R_a}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_b}{R_a}\right)$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma 2\pi R_a L}{\frac{\sigma R_a}{\epsilon_0} \ln\left(\frac{R_b}{R_a}\right)} = \frac{2\pi \epsilon_0 L}{\ln\left(\frac{R_b}{R_a}\right)}$$

$R_b = R_a + d$ distância entre as superfícies

Se $d \ll R_a$

$$\frac{R_b}{R_a} = \frac{R_a + d}{R_a} = 1 + \frac{d}{R_a}$$

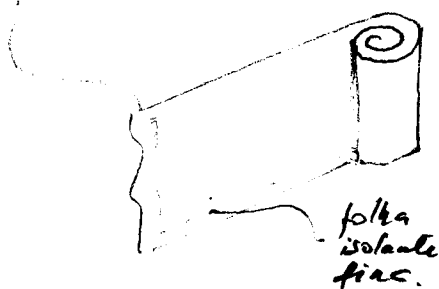
$$\ln(1+x) \approx x \text{ se } x \ll 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{R_b}{R_a}\right) \approx \frac{d}{R_a}$$

Nome como $C = \frac{2\pi\epsilon_0 L R_a}{d}$

$2\pi R_a L = \text{área da sup. lateral interna} \Rightarrow C \approx \frac{\epsilon_0 A}{d}$

como em um capacitor de placas planas.

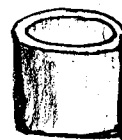
folha metálica
fina



Superpondo uma folha metálica (condutora) com uma de um material isolante (dielétrico)

e enrolando, conseguimos uma área lateral muito grande (de forma compacta, se a folha metálica e isolante forem suficientemente finas). Assim são feitos alguns capacitores comerciais

Garrafa de Leiden

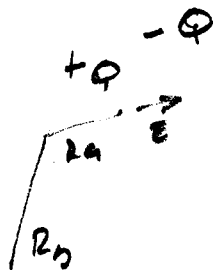


Capacitor esférico

Na região $R_a < r < R_b$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

$$V = \Delta V = V_+ - V_- = \int_{R_a}^{R_b} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_a}^{R_b} \frac{1}{r^2} dr$$



(8)

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_b} \right)$$

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{R_a R_b}{R_b - R_a} \right)$$

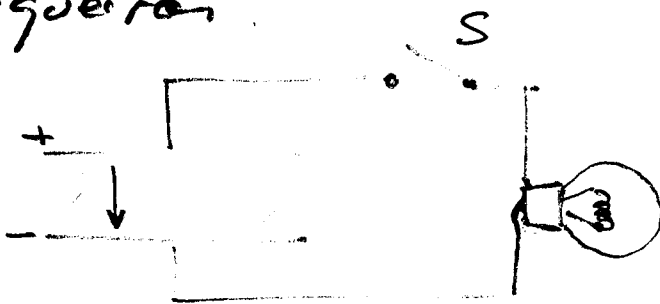
$$\lim_{R_b \rightarrow \infty} C = 4\pi\epsilon_0 R_a$$

Mesmo resultado
obtido anteriormente

Mais uma vez, se $R_b = R_a + d$ e $d \ll R_a$

$$C \approx \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad \text{onde } A = 4\pi R_a^2$$

A capacidade de armazenar cargas elétricas
nas placas de um capacitor e gerar corrente
elétrica quando as placas são conectadas por um
fil condutor tem aplicações tecnológicas
corriqueiras.

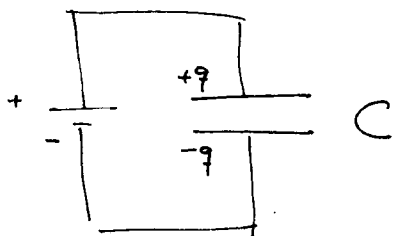


Flash de máquina
fotográfica por
exemplo.

d.d.p. muito altas e correntes elétricas muito
intensas podem ser armazenadas em capacitores.

Energia armazenada em um capacitor.

(9)



Para incrementar a carga no capacitor de um valor dq necessitamos efetuar um trabalho $dW = V dq$

$V \equiv$ d.d.p. nos terminais do capacitor.

$$V = \frac{q}{C} \Rightarrow dW = \frac{q dq}{C}$$

$$W = \int_0^Q \frac{q dq}{C} = \frac{Q^2}{2C} \quad \text{ou} \quad (\text{usando que } Q = CV)$$

$$W = \frac{C^2 V^2}{2C} = \frac{1}{2} C V^2 \quad \text{ou} \quad (\text{usando } Q = CV)$$

$$W = \frac{1}{2} QV$$

Para um capacitor de placas planas e paralelas

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \Rightarrow W = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} V^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \underbrace{Ad}_{\text{volume } v \text{ entre as placas}} \left(\frac{V^2}{d^2} \right)$$

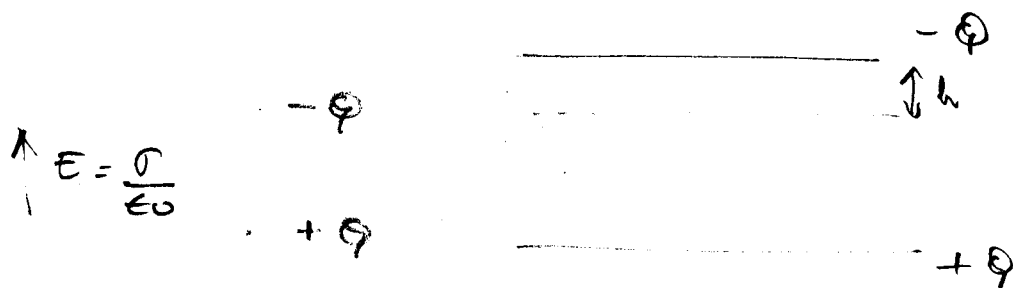
$$U = W = \frac{1}{2} \epsilon_0 v \left(\frac{V^2}{d^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{U}{v} = u \equiv \text{densidade de energia} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{E^2 d^2}{d^2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

mesmo que podemos pensar que a energia está armazenada no campo elétrico entre as placas.

Outra abordagem:



Afastar as placas. O trabalho realizado por um agente externo para fazer isso é dado por

$$- \underbrace{E_+ \cdot h \cdot (-Q)}_{\text{carça da placa (-)}}$$

sinel (-) pq

é o trabalho

feito pelo agente externo.

trabalho feito pelo campo produzido pela placa + (ΔV)

$$\left. \begin{array}{l} E_+ = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \\ Q = \sigma A \end{array} \right\} \Rightarrow W = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} h \sigma A = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} \right) h \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} \right) \epsilon_0 A$$

$$= \frac{1}{2} E^2 h \epsilon_0 A \quad \text{onde}$$

$$hA = \Delta V \Rightarrow \frac{W}{\Delta V} = \boxed{u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2}$$

densidade de energia gasta para criar campo na região Ah (antes não havia campo ali!)

$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$
campo total na região entre as placas.

Capacitor esférico

$$C = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{R_a R_b}{R_a + R_b} \right)$$

$$U = \frac{Q^2}{2C}$$

; lim $C = 4\pi\epsilon_0 R_a$
 $R_b \rightarrow \infty$

/
esfera isolada de raio R_a

$$U = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R_a}$$

Por outro lado $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_a}$

/
potencial
na sup. de esfera

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} QV$$

/
Trabalho realizado para carregar a esfera.

—
Mas vale ver se podemos imaginar que a energia está armazenada no campo. No caso, existe campo em todo o espaço.

$$u(r) = \frac{\epsilon_0}{2} E^2(r) = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2$$

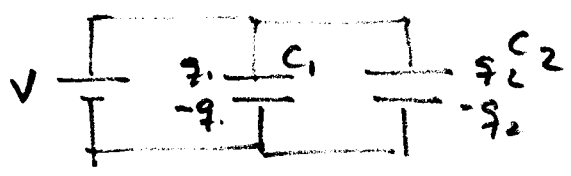
Em um volume $dV = 4\pi r^2 dr$ tem uma energia

$$dU = u dV = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 r} dr$$

$$U = \int_R^\infty dU = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{1}{2} QV //$$

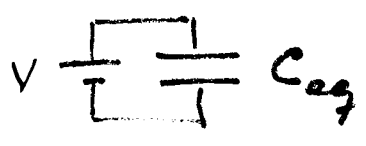
Associação de capacitores

• Em paralelo



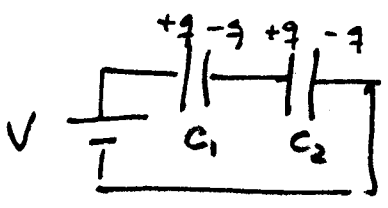
$$q = q_1 + q_2$$

$$q = C_{eq} V = C_1 V + C_2 V$$

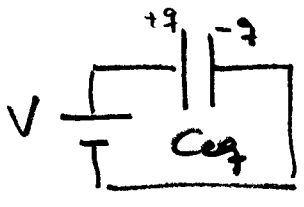


$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

• Em série



$$V = V_1 + V_2 \Rightarrow \frac{q}{C_{eq}} = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2}$$



$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

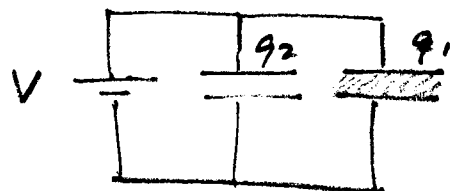
Dieletricos : verificação experimental

(13)

Faraday :

Dois capacitores carregados com a mesma ddp; um com dielétrico outro sem

A carga no capacitor com dielétrico é maior.

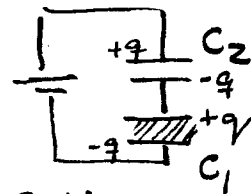


$$C = q/V \Rightarrow q = CV$$

$$q_1 > q_2 \Rightarrow \boxed{C_1 > C_2}$$

$$q_1/q_2 = C_1/C_2 = K - \text{cte dielétrico}.$$

Colocando a mesma carga em C_1 e C_2

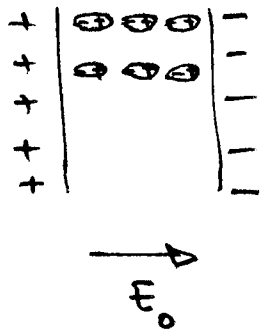


Experimentalmente $V_1 < V_2$; $q = C_1 V_1 = q = C_2 V_2$

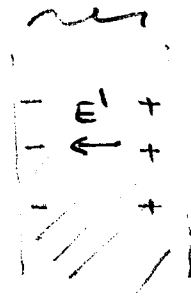
$$\Rightarrow \frac{C_1}{C_2} = \frac{V_2}{V_1} \Rightarrow K = \frac{V_2}{V_1} \Rightarrow \boxed{V_1 = \frac{V_2}{K}}$$

Dieletrico

Dieletrico



$\Leftrightarrow$




 Separação entre os centros de carga é relativamente muito pequena. $\rightarrow V \propto E$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

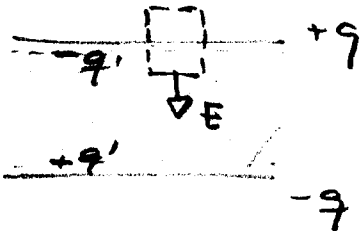
$$E < E_0 \Rightarrow \Delta V < \Delta V_0$$

na presença de dielétrico

na ausência de dielétrico

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \frac{E_0}{\kappa} \\ \Delta V = \frac{\Delta V_0}{\kappa} \end{array} \right.$$

Lei de Gauss na presença de dielétrico.



$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

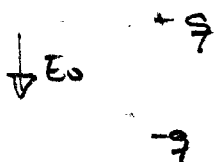
$$E \cdot A = \frac{q - q'}{\epsilon_0}$$

$$Q = q - q'$$

carga superficial no dielétrico (induzida pelo campo E_0)

$$\Rightarrow E = \frac{q}{\epsilon_0 A} - \frac{q'}{\epsilon_0 A}$$

$$E = \frac{E_0}{\kappa}$$



$$\Rightarrow E = \frac{q}{\kappa \epsilon_0 A}$$

$$E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 A}$$

carga livre (na placa condutora)

Átomo de hidrogênio

campo do próton sobre o elétron

$$E = \frac{kq}{r^2} \quad r \approx 0.5 \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$E \approx 6 \times 10^{11} \frac{\text{V}}{\text{m}} = 6 \frac{\text{GV}}{\text{cm}}$$

Isso é enorme!

Um campo externo de 60 kV/cm é considerado um campo muito intenso para ser gerado em um laboratório

Um campo desse produziria um deslocamento de $\sim 10^{-5} \text{ m}$.



$$\frac{q}{k\epsilon_0 A} = \frac{q}{\epsilon_0 A} - \frac{q'}{\epsilon_0 A} \Rightarrow q' = q \left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q - q'}{\epsilon_0} = \frac{q}{k\epsilon_0} \quad q - q' = \frac{q}{k}$$

$$k\epsilon_0 = \epsilon$$

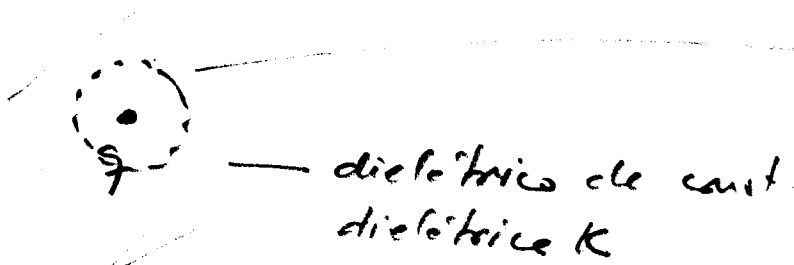
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon} \quad \text{carga livre}$$

$$\epsilon = k\epsilon_0$$

$k=1$ no vácuo $\Rightarrow \epsilon = \epsilon_0$ no vácuo.

O efeito da polarização do dielétrico foi até sendo levado em conta quando substituímos ϵ_0 por $\epsilon = k\epsilon_0$.

Isto é bastante geral (não apenas para o caso de campo uniforme gerado por placas planas)



Lei de Gauss

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon}$$

carga livre apenas.

$$\frac{q}{\epsilon_0 A} = \frac{q}{K \epsilon_0 A} + \frac{q'}{\epsilon_0 A}$$

$\left(\frac{q'}{A} \right)$ — carga superficial induzida.

densidade de carga superficial

$$\rightarrow \equiv P$$

polarização.

- Quanto maior for a carga superficial induzida, maior será a polarização P .

$$P = \frac{q'd}{Ad}$$

momento de dipolo de carga induzida
volume do dielétrico.

Densidade volumétrica de dipolos induzidos

$$\epsilon_0 = \frac{q}{\epsilon_0 A} \quad \frac{\epsilon_0}{K} = \epsilon = \frac{q}{K \epsilon_0 A}$$

$$\frac{q}{A} = \epsilon_0 \left(\frac{q}{K \epsilon_0 A} \right) + \frac{q'}{A}$$

campo de polarização do dielétrico

$$D = \epsilon_0 E + P$$

deslocamento elétrico.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

campo de deslocamento elétrico

Os vetores $\vec{D}$ e $\vec{P}$ podem ser expressos em termos de $\vec{E}$.

$$D = \frac{q}{A} = \frac{q}{K\epsilon_0 A} K\epsilon_0 = \underbrace{E K\epsilon_0}_{\epsilon}$$

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon \vec{E}} \quad \epsilon = K\epsilon_0 //$$

$$P = \frac{q'}{A} = \frac{q}{A} - \frac{q}{KA} = \frac{q}{A} \left(1 - \frac{1}{K}\right) = D \left(1 - \frac{1}{K}\right)$$

$$= \epsilon E \left(1 - \frac{1}{K}\right) = \frac{\epsilon E}{K} (K-1) = \epsilon_0 E (K-1)$$

$$\boxed{\vec{P} = \epsilon_0 (K-1) \vec{E}}$$

$$\oint \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{S} = q \Rightarrow \boxed{\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = q}$$

so as cargas livres.

$\vec{E}$ está associado a todas as cargas (livres e de polarização)

$\vec{D}$ está associado apenas as cargas livres.

$\vec{P}$ está associado apenas as cargas de polarização.

$$\bullet \vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \epsilon = K\epsilon_0$$

$$\bullet \vec{P} = (K-1)\epsilon_0 \vec{E}$$

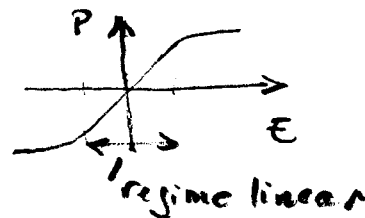
$$\bullet \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Para campos elétricos relativamente fracos

$$\vec{P} \propto \vec{E}$$

Em geral

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$



$\chi \equiv$ susceptibilidade elétrica do meio; quanto maior for χ maior será a polarização do meio

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \kappa \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\kappa - 1) \vec{E} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \Rightarrow$$

$$\chi = \kappa - 1 \quad \text{ou} \quad \boxed{\kappa = 1 + \chi}$$

relação entre a ϵ dielétrica
e a susceptibilidade elétrica do meio

Faça os exemplos 1-10 como exercício . +

Problemas 30.10, 30.16, 30.46, 30.48, 30.54