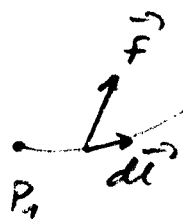


Potencial Eletrostático

1

Forças conservativas: trabalho realizado independente da trajetória; depende apenas dos

pts P_1 e P_2 .



$$W_{P_1 \rightarrow P_2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

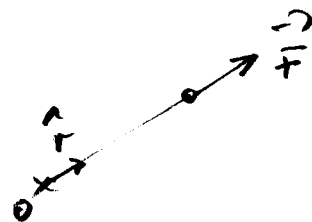
Nestes casos é útil definir energia potencial associada à força $\vec{F}$. Na verdade, definiremos a variação de energia potencial

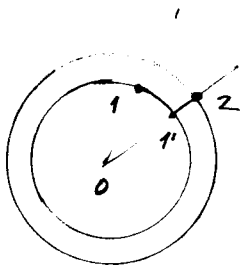
$$\Delta U = U(P_2) - U(P_1) = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = -W_{P_1 \rightarrow P_2}$$

A energia potencial, propriamente dita, é definida a menos de uma cte arbitrária (origem de energia) que é especificada, por exemplo, arbitrando que $U(P_a) = 0$ em algum ponto P_a .

- Forças centrais, cujo módulo só depende da distância ao centro de forças, são conservativas

$$\vec{F} = F(r) \hat{r}$$





$$W_{P_1-P_2} = W_{P_1'-P_2'} \text{ pois}$$

$$W_{1-1'} = 0 \quad \vec{F} \perp d\vec{l} \text{ no trecho } 1-1'.$$

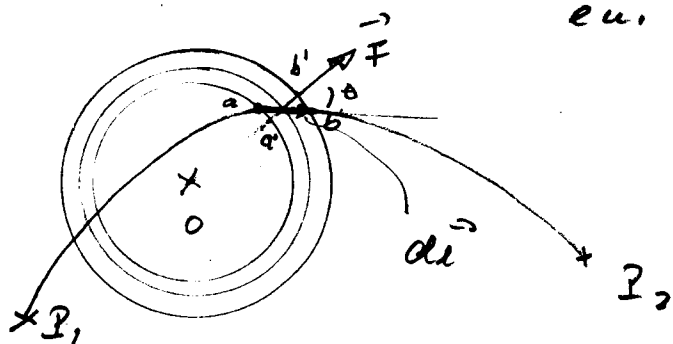
$$\vec{F} = f(r) \hat{r}$$

$$W_{1'-2} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{r_1}^{r_2} f(r) dr = G(r_2) - G(r_1)$$

$$\text{onde } f(r) = \frac{dG}{dr}$$

Qualquer que seja a trajetória, podemos reparti-la em trechos infinitesimais

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = F dl \cos \theta = F dr$$



Trecho $a \rightarrow b$ aproximado por $aa' + b'b$

De $a \rightarrow a'$ $W = 0$ de $b' \rightarrow b$ $W = 0$ pois $\vec{F} \perp d\vec{l}$;

só resta de $a' \rightarrow b'$ onde $W_{a'-b'} = \int F dr$ que só depende de $R_{a'} = R_a$ e $R_{b'} = R_b$.

Neste caso, o trabalho só depende dos raios

$$R_{P_1} \text{ e } R_{P_2}$$

(*) Note: Este é o caso da força Coulombiana.

Força Coulombiana é conservativa $\Rightarrow$

podemos definir uma energia potencial associada a ela

$$\Delta U = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Obs: Se a resultante das forças atuando sobre uma partícula é conservativa
 $\Rightarrow W = \Delta E_c \Rightarrow \Delta E_c = -\Delta U \Rightarrow$
 $\Delta E_c + \Delta U = 0$; $E = E_c + U$
 se conserva.

Associado à força Coulombiana definimos o campo elétrico $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$,
 tal que $\vec{F} = q_0 \vec{E}$.

Definimos potencial elétrico de forma análoga.

$$\Delta V = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\boxed{\Delta U = q_0 \Delta V}$$

(-) Trabalho feito pelo campo eletrostático.

Evidentemente, o trabalho feito pelo campo independe da trajetória ligando P_1 a P_2 ; só depende de P_1 e P_2 .

4
 Se ele independe da trajetória e não depende das posições P_1 e $P_2 \Rightarrow$ em qualquer trajetória fechada (seir e volte a P_1) $\Delta V = \Delta U = 0$.

Na verdade esse é uma condição necessária e suficiente para que uma força (ou campo) seja conservativa (o) : sua circulação
 $(\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ ou $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell})$ ao longo de qualquer caminho fechado deve ser nula.

Unidade $\vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ tem dimensão de N.m no SI.

$$1J = 1Nm$$

$\vec{E}$ tem unidade de $\frac{N}{C}$ no SI $\Rightarrow$

Potencial eletrostático Coulombiano V

tem dimensão de $\frac{J}{C} = \text{Volt}$

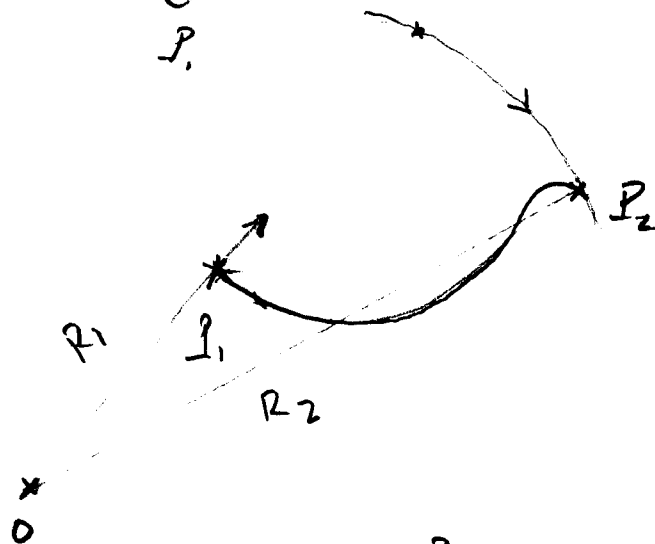
$$1V = 1J/C$$

(*) Note que E tb. pode ser dado em $\frac{V}{m}$
 $dV = -E d\ell$

Potencial devido a uma carga pontual.

$$\Delta V = V(P_2) - V(P_1) = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2} \hat{r}$$



$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= E dr \Rightarrow V(P_2) - V(P_1) = - \int_{P_1}^{P_2} E dr = - \int_{P_1}^{P_2} \frac{kq}{r^2} dr \\ &= -kq \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{P_1}^{P_2} = kq \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \end{aligned}$$

Escolhendo o origem de potencial $V(\infty) = 0$

$$V(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

Princípio da superposição: potencial devido a uma distribuição de cargas



$$V(P) = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i}$$

Usando o princípio de superposição,
 Observe que o cálculo do potencial é,
 em geral, mais fácil que o cálculo do
 campo elétrico. O cálculo do potencial
 envolve uma soma de escalares enquanto
 que o cálculo do campo envolve uma
 soma vetorial

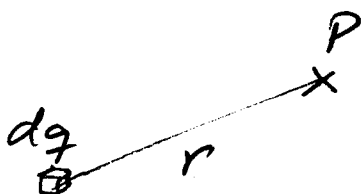
$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

Para distribuições contínuas de carga.

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r}$$

Integre sobre todos os elementos
 de carga que compõem a
 distribuição



r representa a distância entre o elemento
 de carga dq da distribuição e o ponto P
 onde o potencial está calculado.

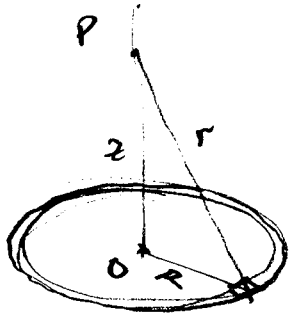
7
Dado o campo elétrico em todo o espaço,
é possível calcular o potencial elétrico
em todo o espaço. A recíproca tb é
verdadeira: se conhecemos o potencial
em todo o espaço podemos obter o
campo em todo o espaço. Podemos
trabalhar com o campo ou com o
potencial; o que for mais conveniente.

É possível mostrar que $\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} V}$
gradiente de V

$$\frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z}.$$

veja notas complementares.

Exemplo: Anel isolante uniformemente carregado. Ponto P sobre o eixo



$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$V = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

come somamos todos os elementos de carga que compõem o anel

$$V(z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$$

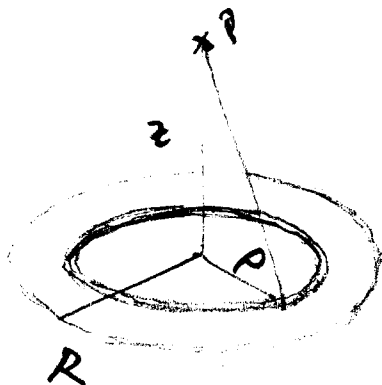
$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} (R^2 + z^2)^{-1/2}$$

$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{2} (R^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2z \right)$$

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}$$

Ex. Disco circular isolante uniformemente carregado; ponto P sobre o eixo.



Potencial devido a um anel de raio ρ e carga dq

$$dV(P) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

Densidade de carga do disco $\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$

Um anel de raio ρ tem carga $dq = \sigma \cdot 2\pi\rho d\rho$

$$dV = \frac{\sigma 2\pi\rho d\rho}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$V = \int dV = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[(\rho^2 + z^2)^{-1/2} \right]_0^R$$

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[(R^2 + z^2)^{-1/2} - \frac{1}{|z|} \right] //$$

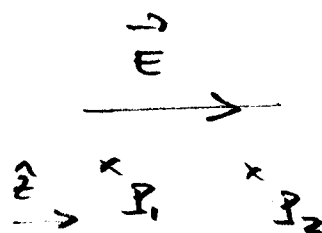
$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left\{ \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{z}{|z|^3} \right\}$$

$\frac{d}{dz} \frac{1}{|z|} = -\frac{1}{|z|^2}$ não é definida em $z=0$

Nos casos em que é + fácil calcular o campo: 10

Potencial em um campo uniforme

$$\vec{E} = E \hat{z} \quad |\vec{E}| = E = \text{cte} \quad \text{independente de } z$$



$$\begin{aligned} V(P_2) - V(P_1) &= - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{z} \\ &= - \int_{P_1}^{P_2} E dz = -E(z_2 - z_1) \end{aligned}$$

Ex: campo gerado por um plano uniformemente carregado $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

Nome como não podemos tomar a origem do potencial em os pois a distribuição de cargas se estende até o ∞ . Escolhendo a origem $V(z=0) = 0$

$$\boxed{V(z) = -Ez} \quad \checkmark$$

$$V(z) = - \int_0^z E dz' = -Ez$$

Fic uniformemente carregado com densidade linear de carga λ .

Nesse caso, o campo elétrico pode ser calculado facilmente usando a Lei de Gauss