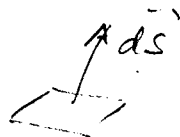


Fluxo de um campo vetorial através de uma superfície

$$d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$d\vec{S}$ = vetor área



$|d\vec{S}| = dS = \text{área do elemento superficial}$

Direção: $\perp$ à superfície

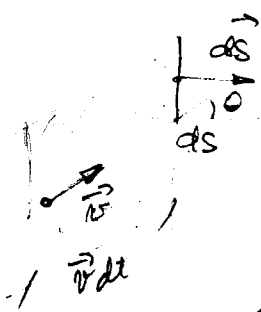
Sentido: para superfícies fechadas, de dentro para fora



Se a superfície é aberta é arbitrário.

Mede a "quantidade" de campo (linhas de campo) que atravessa a superfície dS

Análogo à vazão (campo de velocidade) de um fluido



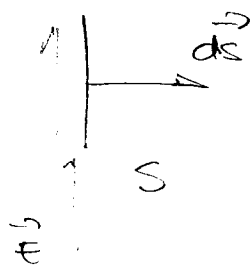
Em dt , todas as partículas que estão dentro do volume do prisma com base dS e geratriz dt atravessam a superfície (e apenas essa)

$$dV = \vec{v} \cdot d\vec{S} dt \Rightarrow \text{volume do fluido}$$

que passa através de $d\vec{S}$ (fluxo ou vazão) por unidade de tempo $dV/dt = \vec{v} \cdot d\vec{S}$

Vamos explorar um pouco esta definição de fluxo

(a)



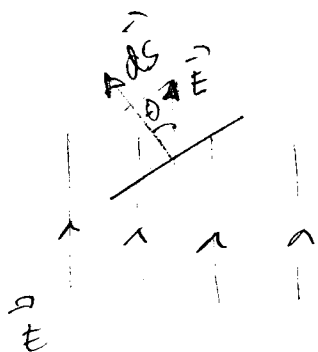
$\vec{E}$ tangente à superfície $\Leftrightarrow$

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$d\phi = 0$$

OK. $\vec{E}$ não atravessa a superfície nesse caso, ou seja, o fluxo de $\vec{E}$ através de $d\vec{S}$ é de fato nulo.

(b)



A área está inclinada em relação ao campo.

A componente de $\vec{E} \parallel$ à superfície não deve contribuir para o fluxo.

No caso o ângulo entre $\vec{E}$ e $d\vec{S}$ é $\theta \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS \cos \theta$

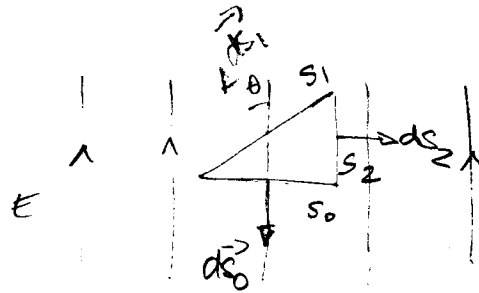
$E \cos \theta$ = componente de $\vec{E}$ na direção de $d\vec{S}$, ou seja, na direção $\perp$ à área em questão.

$$d\phi = \underline{E \cos \theta} dS$$

r.k.

componente de $\vec{E}$ na direção $\perp$ à sup.

c) Campo uniforme, superfície fechada.



Fluxo através de S_1

$$d\phi_{S_1} = E \cos \theta dS_1$$

Fluxo através de S_2

$$d\phi_{S_2} = 0 \quad \vec{E} \perp d\vec{S}_2$$

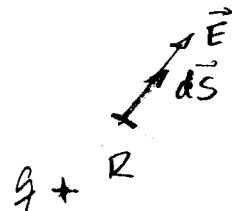
Fluxo através de S_0 : $d\phi_{S_0} = -E dS_0$

Note que $dS_0 = dS_1 \cos \theta \Rightarrow d\phi_1 = -d\phi_0$

Fluxo total $d\Phi = d\phi_0 + d\phi_1 + d\phi_2 = d\phi_0 + d\phi_1 = 0$

OK - Tudo que entra sai

Caso 1 : Fluxo de campo elétrico produzido por uma carga pontual + através de uma superfície esférica de raio R centrada na carga.



$$d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{s} = E ds$$

ao longo dessa superfície e
o campo E não varia
em módulo

$$\Phi = \int d\phi = \int E ds = E \int ds = ES = E 4\pi R^2$$

como feito sobre todos os elementos de área que compõem
a superfície esférica

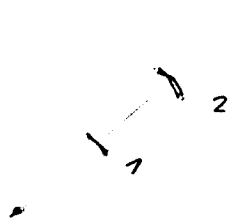
$$\Phi = \frac{kq}{R^2} 4\pi R^2$$

$E = kq/R^2$
sobre a superfície
de raio R

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q 4\pi \Rightarrow \boxed{\phi = \frac{q}{\epsilon_0}}$$

independente do raio da superfície
esférica

2. Fluxo através de elementos de área de superfícies esféricas concêntricas, centradas em q .



$$d\phi_1 = E_1 dS_1$$

$$d\phi_2 = E_2 dS_2$$

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r_1^2}$$

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r_2^2}$$

$$\frac{d\phi_1}{d\phi_2} = \frac{E_1}{E_2} \frac{dS_1}{dS_2} ; \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

$$dS_1 = r_1^2 \sin\theta d\phi d\psi$$

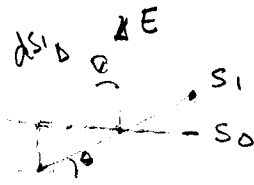
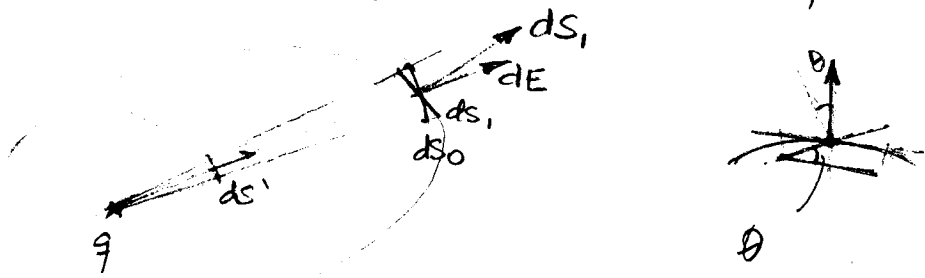


$$\frac{dS_1}{dS_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d\phi_1}{d\phi_2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\phi_1}{d\phi_2} \quad \checkmark$$

3. Vamos distorcer a porção da superfície

4.6



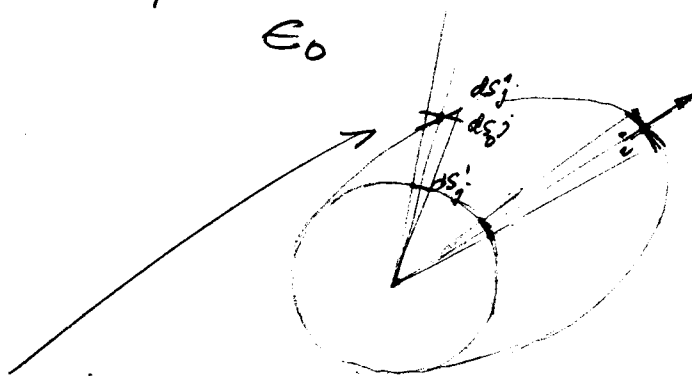
$$d\phi_0 = E dS_0$$

$$d\phi_1 = E dS_1 \cos \theta$$

$$d\phi_1 = d\phi_0 \text{ pois } dS_0 = dS_1 \cos \theta$$

Com o resultado anterior $d\phi_{S_0} = d\phi_{S_1} \Rightarrow$

$$\phi_{S_1} = \frac{q}{\epsilon_0}$$



$$dS_1^1 = dS_1^0$$

$$d\phi_{S_1^1} = d\phi_{S_1^0} = d\phi_{S_1^1}$$

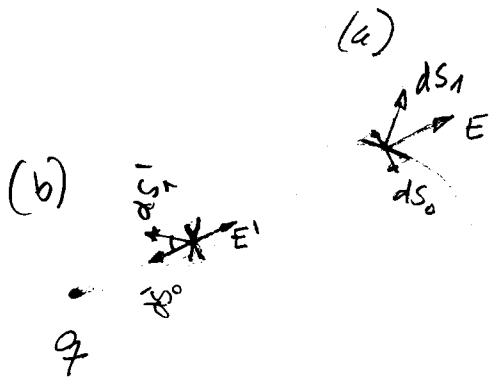
$$dS_1^1 = dS_1^0$$

$$d\phi_{S_1^1} = d\phi_{S_1^0} = d\phi_{S_1^1}$$

$$\phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

fluxo através de qq superfície fechada S

$q \equiv$ carga no volume delimitado por S



$$d\phi_1^{(a)} = \vec{E}^{(a)} \cdot d\vec{S}_1 = E^{(a)} dS_1 \cos \theta_1^{(a)} = d\phi_0^{(a)}$$

$$S \quad d\phi_0^{(a)} = -d\phi_0^{(b)}$$

$$d\phi_0^{(b)} = d\phi_1^{(b)}$$

Portanto, ϕ através de S é nulo!

Lei de Gauss

$$\Phi_S = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{onde } q \text{ é a carga}$$

no interior do volume delimitado pela superfície

$$\phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

fluxo através de qq superfície fechada S

$q \equiv$ carga no volume delimitado por S .