Equações de Maxwell

(i) Antes de Maxwell

1. Lei de Gauss: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$

Fluxo de $\vec{E}$ através de uma superfície fechada é igual a carga elétrica contida no volume delimitado pela superfície.

2. $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

Inexistência de carga (monopolo) magnético. Polos magnéticos N e S isolados não foram detectados ainda.

3. Lei de Faraday: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$

Variação de fluxo de campo magnético através de uma superfície aberta gera campo elétrico. A f.e.m. induzida $\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ (circulação do campo elétrico induzido ao longo de um circuito fechado que delimite a superfície aberta S)

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

4. Lei de Ampère: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$

Corrente elétrica gera campo magnético. A circulação de $\vec{B}$ ao longo de um circuito fechado é proporcional a corrente elétrica I que atravessa a superfície aberta delimitada por esse contorno.

1. $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = q/\epsilon_0$

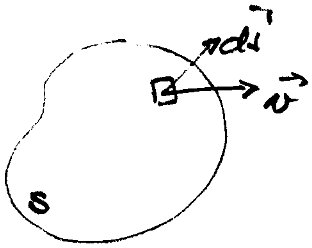
2. $\oint \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$

3. $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{S}$

4. $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

Teorema da divergência: $\oint_S \vec{v}\cdot d\vec{S} = \oint_V \text{div}\,\vec{v}\,dV$

Fluxo de um campo vetorial $\vec{v}$ através de uma superfície fechada S é igual a integral do divergente de $\vec{v}$ no volume V delimitado pela superfície S.



$\text{div}\,\vec{v} \equiv \vec{\nabla}\cdot\vec{v}$

Em coordenadas Cartesianas

$$\text{div}\,\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

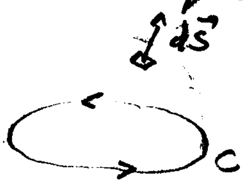
$\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}$ — campo vetorial

$v_x = v_x(x,y,z)$; $v_y = v_y(x,y,z)$; $v_z = v_z(x,y,z)$

As componentes do campo, em geral, dependem da posição.

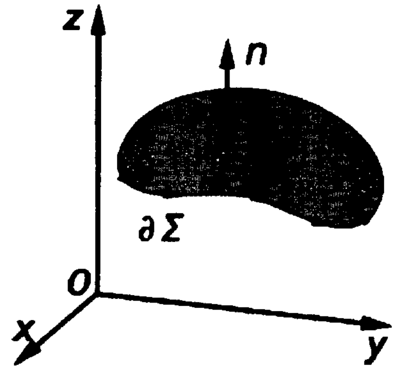
Teorema do rotacional: $\oint_C \vec{v}\cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot}\,\vec{v}\cdot d\vec{S}$

A circulação de um campo vetorial ao longo de um circuito fechado C é igual ao fluxo do rotacional de $\vec{v}$ através de uma superfície aberta S apoiada no contorno C.



sentido de $d\vec{S}$ dado pela regra da mão direita, compatível com a orientação da circulação.

Teorema do rotacional



$$\iint_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{a}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{a}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{a}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right).$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{a}_y & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Coordenadas Cartezianas

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & r\mathbf{a}_\phi & \mathbf{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\phi & A_z \end{vmatrix}$$

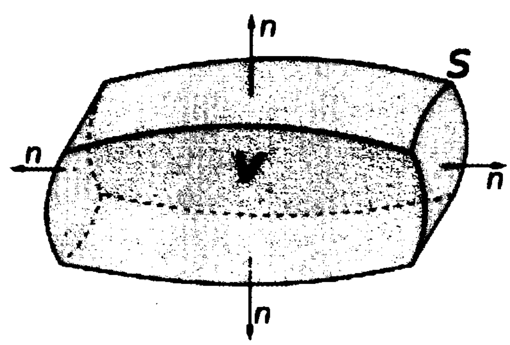
Coordenadas Cilindricas

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & r\mathbf{a}_\theta & r\sin\theta\mathbf{a}_\phi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\phi \end{vmatrix}$$

Coordenadas Esféricas

Teorema do divergente

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F})\, dV = \oiint (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS.$$



$$\vec{F} = F_x \hat{x} + F_y \hat{y} + F_z \hat{z} \qquad F_x = F_x(x,y,z);\ F_y = F_y(x,y,z);\ F_z = F_z(x,y,z)$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Lei de Gauss:
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_V \operatorname{div}\vec{E}\, dV = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$q = \int_V \rho\, dV$ onde ρ = densidade volumétrica de carga

$$\Rightarrow \int_V \operatorname{div}\vec{E}\, dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0}\, dV \Rightarrow \boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

Lei de Gauss na forma diferencial. Também conhecida por Eq. de Poisson.

2. $\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$ (inexistência de monopolo magnético)

válida para qq superfície fechada S.

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{S} = \oint_V \operatorname{div}\vec{B}\, .\, d\vec{s} = 0$$

volume englobado por S.

Como isso é válido p/ qq $S \Rightarrow$ válido p/ qq $V \Rightarrow$

$\boxed{\operatorname{div} B = 0}$ Expressa a inexistência de monopolo ("carga") magnético.

3. Lei de Faraday: $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{S}$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot}\,\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$\int \text{rot}\,\vec{E}\cdot d\vec{S} = -\int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \Rightarrow \boxed{\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

válido p/ qq circuito C

Forma diferencial da Lei de Faraday.

4. Lei de Ampère: $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

$$I = \int \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

densidade de corrente

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot}\,\vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}}$$

Forma diferencial da lei de Ampère.

Antes de Maxwell · Forma integral

1. $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$

2. $\oint \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$

3. $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{S}$

4. $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

Forma diferencial:

1. $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

2. $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

3. $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

4. $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

Existe uma inconsistência nessas equações!

$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} \equiv 0$

$$\operatorname{rot} \vec{A} \equiv \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \hat{x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{A}) = \underbrace{\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y}} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \underbrace{\frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x}} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y}$$

Como $\frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial x}$; $\frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y}$ e $\frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z}$

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0}$

Tomando o div nos dois lados de Eq. 4

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = 0 = \mu_0 \operatorname{div} \vec{j}$$

Isto significaria que $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ sempre, o que não é verdade. A conservação de carga pode ser expressa na forma:

$$\underbrace{\oint \vec{j} \cdot d\vec{S}}_{\text{fluxo de } \vec{j} \text{ através de uma superfície fechada } S} = -\frac{dq}{dt}$$

variação de carga englobada pela superfície

$$\int_V \operatorname{div} \vec{j} \, dV = -\frac{d}{dt} \int \rho \, dV \Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

Forma diferencial de eq. que expresse a conservação de carga elétrica

Qualquer fluxo de carga deve vir de uma fonte.

Maxwell reparou essa inconsistência adicionando um termo à lei de Ampère.

. A eq. de continuidade que expresse a conservação de carga é dada por: $\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

Pela Lei de Gauss: $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho = \epsilon_0 \operatorname{div}\vec{E}$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}\vec{E} = \operatorname{div}\left(\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

Maxwell corrigiu a inconsistência adicionando o termo $\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ à Lei de Ampère:

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

Lei de Ampère Maxwell

Dessa forma variação de campo elétrico no tempo também gera campo magnético, assim como variação de campo magnético gera f.e.m. induzida.

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_d) \qquad j_d = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

"corrente de deslocamento".

Na forma integral a Lei de Ampère-Maxwell toma a forma:

$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \int \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \cdot d\vec{S}}$$

Equações de Maxwell

Forma integral

1. $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = q/\epsilon_0$

2. $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0$

3. $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\dfrac{d\Phi_B}{dt}$

4. $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 i + \mu_0\epsilon_0 \dfrac{d\Phi_E}{dt}$.

Forma diferencial

1. $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0$

2. $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

3. $\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$

4. $\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0\epsilon_0 \dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

---

força de Lorentz: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B})$

Energia Eletromagnética $U = \dfrac{1}{2}\int\left(\epsilon_0 E^2 + \dfrac{B^2}{\mu_0}\right)dV$

Se $\operatorname{div}\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B}$ pode ser expresso em termos de um potencial vetor $\vec{A}$ definido como

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}.$$

Note que $\vec{A}$ é definido a menos de um gradiente de uma função arbitrária $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\psi \Rightarrow \vec{\nabla}\wedge\vec{A}' = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$ pois rot grad $\equiv 0$.

Onda eletromagnética no vácuo

No vácuo as Eqs. de Maxwell tomam a seguinte forma:

(i) $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$

(ii) $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

(iii) $\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

(iv) $\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$

Tomando o rotacional das eqs. (iii) e (iv) obtemos:

(iii) $\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}) = \vec{\nabla}\wedge\left(-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}) = \underbrace{-\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)}_{\text{usando a eq. (iv)}}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}) = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}}$$

Analogamente,

(iv) $\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}) = \vec{\nabla}\wedge\left(\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}) = \underbrace{\mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial}{\partial t}\left(-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)}_{\text{usando (iii)}}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}) = -\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 B}{\partial t^2}}$$

Utilizando a relação:

$$\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$$

e levando em conta que $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ e $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$ obtemos:

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \end{aligned}}$$

As eqs. para $\vec{E}$ e $\vec{B}$ ficam desacopladas.

Cada componente cartesiano de $\vec{E}$ e $\vec{B}$ satisfaz a equação de onda em 3-dimensões:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

No caso $v^2 = \dfrac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \Rightarrow v = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3{,}00 \times 10^8 \, m/s$

que é a velocidade de luz no vácuo!

μ_0 e ϵ_0 podem ser medidos com experimentos de eletrostáticos e magnéticos envolvendo a lei de Coulomb e de Biot-Savart por exemplo

Note que o termo introduzido por Maxwell na lei de Ampère tem um papel fundamental na dedução desse resultado