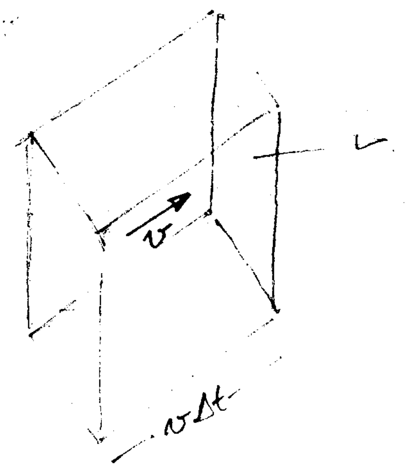
Corrente Elétrica

$i = \frac{dq}{dt}$ carga elétrica que atravessa uma secção do fio condutor por unidade de tempo. Unidade $C/s = A$ (MKS)



As partículas que passam por dS em dt são os que estão contidos no prisma oblíquo de base dS e aresta $v\,dt$

volume desse prisma = base x altura

$dS \times v\,dt \cos\theta$

$V = d\vec{S} \cdot \vec{v}\,dt$

Considere que ρ = densidade de carga / unidade de volume.

A carga que passa por dS em dt é

$$\begin{cases} dq = \rho V = \rho\, d\vec{S} \cdot \vec{v}\, dt \Rightarrow i = \frac{dq}{dt} = \rho\, \vec{v} \cdot d\vec{S} \\ \vec{j} \equiv \text{densidade de corrente} = \rho \vec{v}. \end{cases}$$

Chamando de n = densidade de portadores (# de portadores) de carga por unidade de volume $\rho = nq$

q - carga dos portadores

$$\boxed{\vec{j} = nq\vec{v}}$$

A corrente infinitesimal através do $d\vec{S}$ é dada por

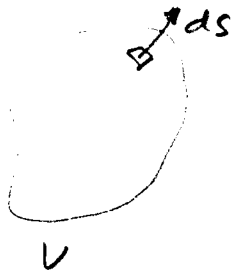
$di = \vec{j} \cdot d\vec{S}$ $\qquad i = \int di = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$

fluxo de $\vec{j}$ através de S.

Generalização n_i portadores de carga por unidade de volume com carga q_i e velocidade $\vec{v}_i$ $\Rightarrow \boxed{\vec{j} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i}$

Conservação da carga, equação da continuidade e correntes estacionárias.

Considere um volume V delimitado por S.



A corrente que flui através de S

$$I_S = \oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

$$\left.\frac{dq}{dt}\right|_S = \oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

A carga total contida em V: $q = \int_V \rho\, dv$ $\Rightarrow$

$$\frac{dq}{dt} = \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) dv \quad \Rightarrow$$ A conservação da carga impõe que

$\rho = \rho(x,y,z,t)$

$$\underbrace{\oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}}_{\text{carga que sai do volume } V \text{ / unidade de tempo}} = -\frac{dq}{dt}$$ variação da carga no volume v.

Teo. de Gauss

$$\boxed{\oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv}$$ conservação da carga (o que sai é a redução dentro)

(*) $\oint_S \vec{f}\cdot d\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\,\vec{f}\, dv$ $\mathrm{div}\,\vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$

$\vec{f} = f_x \hat{x} + f_y \hat{y} + f_z \hat{z}$

$$\begin{cases} f_x = f_x(x,y,z) \\ f_y = f_y(x,y,z) \\ f_z = f_z(x,y,z) \end{cases}$$

forma local: $\boxed{\mathrm{div}\,\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$

equação da continuidade

Corrente estacionária : $\vec{j}$ permanece cte no tempo; $\vec{j}$ pode variar espacialmente $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r})$, porém, para um dado $\vec{r}$, $\vec{j}$ não varia no tempo.

Se a corrente é estacionária devemos ter $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

S — sobre qq superfície fechada.

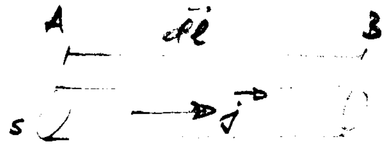
Condutividade elétrica e a lei de Ohm.

A aplicação de um campo elétrico em um condutor causa o aparecimento de uma corrente elétrica. Para campos elétricos relativamente fracos

$\vec{j} = \sigma \vec{E}$ onde $\sigma \equiv$ condutividade elétrica do meio. depende apenas do material.

$\vec{j}$ é linearmente proporcional ao campo aplicado $\vec{E}$

$\sigma \equiv$ característica do meio (depende do material)



A d.d.p infinitesimal

$V_A - V_B = \vec{E} \cdot d\vec{l} = E\,dl$

$$i_S = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = jS = \sigma E S \Rightarrow E = \frac{i}{\sigma S} \Rightarrow dV = \frac{i\,dl}{\sigma S}$$

$$dV = \frac{dl}{\sigma S}\, i \Rightarrow V = \frac{l}{\sigma S}\, i$$

linearmente proporcional a corrente i.

$$\underbrace{V_A - V_B \equiv V = Ri}_{\text{Lei de Ohm}} \Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{S}}$$

$\frac{1}{\sigma} = \rho$ — resistividade elétrica (inverso da condutividade)
(não confundir com a densidade de carga. !)

$$\boxed{R = \rho \frac{l}{S}}$$

R - resistência eléctrica: depende do comprimento, da área de secção recta e da condutividade (ou resistividade) do material.

Unidades Ohm: $1\,\Omega = \frac{V}{A}$

A resistividade depende da temperatura. Em muitos casos $\rho = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$ $\quad \rho_0 = \rho(T = T_0)$.

Ex: $\rho(T = 20°C)$
$$\begin{cases} Cu: \ \rho \sim 1.7 \times 10^{-8}\,\Omega m & \text{(condutor)} \\ Si: \ \rho \sim 3 \times 10^{3}\,\Omega m & \text{(semi-condutor)} \\ \text{Quartzo}: \ \rho \sim 10^{16}\,\Omega m \sim \text{Borracha} & \text{(isolante)} \end{cases}$$

Efeito Joule

Para transportar uma carga dq através de uma ddp V é necessário que dispender uma energia $dW = dq\,V$

$$dq = i\,dt \Rightarrow dW = i\,dt\,V \rightarrow \underbrace{\frac{dW}{dt}}_{} = iV$$

P = potência: quantidade de energia dispendida por unidade de tempo

$$P = Vi \ ; \quad V = Ri \Rightarrow \begin{cases} P = Ri^2 \\ P = V^2/R \end{cases}$$

Unidades

$$\text{Watt} = \underbrace{1V}_{V} \times \underbrace{1A}_{i}$$

Corrente fixa: $dP = i\underbrace{dV}_{\text{queda de potencial}}$

Modelo cinético para a Lei de Ohm

$j = n e \langle v \rangle$

velocidade média associada à corrente

$j = \frac{i}{S}$ $\quad i = 1A$ $\quad S = \pi r^2 \quad r \sim 2mm$

$j \simeq 8 \times 10^4 \frac{C}{m^2 s}$

ρ_{Cu}: $8.92\ g/cm^3$

massa atômica do Cu : 1 mol de Cu $\simeq 63.5g$

\# de moles/cm^3 $= \frac{8{,}92}{63.5}$

\# de átomos/mol $= 6{,}02 \times 10^{23}$ $\Rightarrow$ $\frac{\#\text{ de átomos}}{cm^3} \simeq 8.5 \times 10^{22}$

$$\boxed{n \simeq 8.5 \times 10^{28}\ \text{elétrons}/m^3}$$

$$\langle v \rangle = j/ne = \frac{8 \times 10^4}{8.5 \times 10^{28} \times 1.6 \times 10^{-19}} \Rightarrow \langle v \rangle \simeq 6 \times 10^{-6} m/s$$

$v_{qm} = ?$ $\qquad \frac{1}{2} m_e \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow v_{qm} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} \simeq 1.2 \times 10^5 \frac{m}{s}$

$\langle v \rangle \lll v_{qm}$

A velocidade média associada à corrente elétrica é muito menor que a velocidade quadrática média associada à agitação térmica.

Na presença de um campo elétrico $\vec{E}$ os portadores de carga são acelerados por uma força $\vec{F} = q\vec{E}$.

Os portadores de carga, no entanto, colidem e são espalhados por impurezas, imperfeições na rede, fonons (modos vibracionais da rede) que são excitados por agitação térmica.

Modelo:

Imediatamente após uma colisão a direção e sentido da velocidade do portador é aleatório.

$$\langle \vec{v}_j^{\,dc} \rangle = 0$$

Imediatamente antes da colisão o portador terá adquirido $\Delta\vec{p} = q\vec{E}\,\Delta t$

$$m\vec{v}_j^{\,ac} - m\vec{v}_j^{\,dc} = qE\underbrace{t_j}_{\text{tempo entre colisões sucessivas.}}$$

$$m\langle\vec{v}\rangle = qE\underbrace{\frac{1}{N}\sum_j t_j}_{\tau \text{ - tempo médio entre colisões.}}$$

$$\boxed{\langle\vec{v}\rangle = \frac{q\tau}{m}\vec{E}}$$

– velocidade média é proporcional ao campo aplicado.

$$j = nq\langle\vec{v}\rangle$$

velocidade adquirida pelos portadores em função do campo

$$\vec{j} = \underbrace{\frac{nq^2\tau}{m}}_{\sigma} \vec{E}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{nq^2}{m}\tau}$$

tempo médio entre colisões.

Nos metais $q = -e$; $m = m_e$

carga eletrônica

massa eletrônica

$$\boxed{\sigma = \frac{ne^2}{m_e}\tau}$$

Livre caminho médio λ - distância média percorrida entre colisões.

$\lambda = v_{qm}\tau$ clássicamente $v_{qm} \sim 1.2\times10^5$ m/s

$\lambda = v_F\tau$ quanticamente. $v_F \sim 1.6\times10^6$ m/s.

$\lambda \sim 10^2 \underbrace{a_0}_{\text{espaçamento da rede}}$ $\lambda \sim 4\times10^2$ Å

espaçamento da rede.