

# LEI DE AMPÈRE

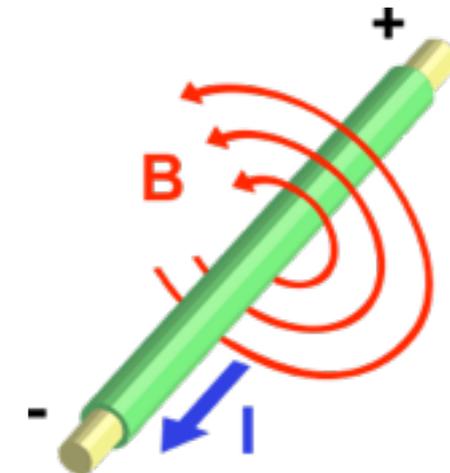
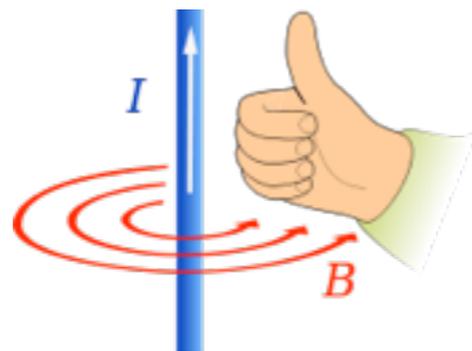
---

Aula # 15

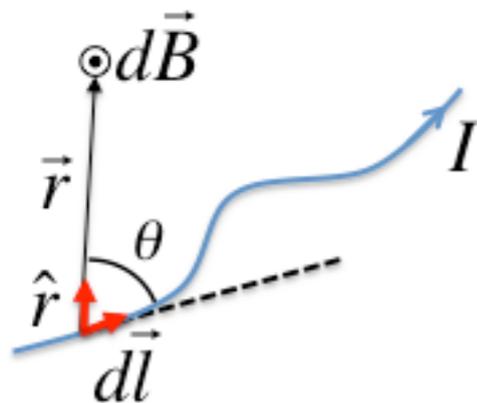
# MAGNETISMO PRODUZIDO POR CARGA EM MOVIMENTO

## BIOT-SAVART

- Carga em movimento gera campo magnético



- Campo magnético produzido por um elemento de corrente em um ponto  $\vec{r}$



$$d\vec{B} = \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} = \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{idl \sin(\theta)}{r^2}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Tm/A}$$

permeabilidade magnética do vácuo

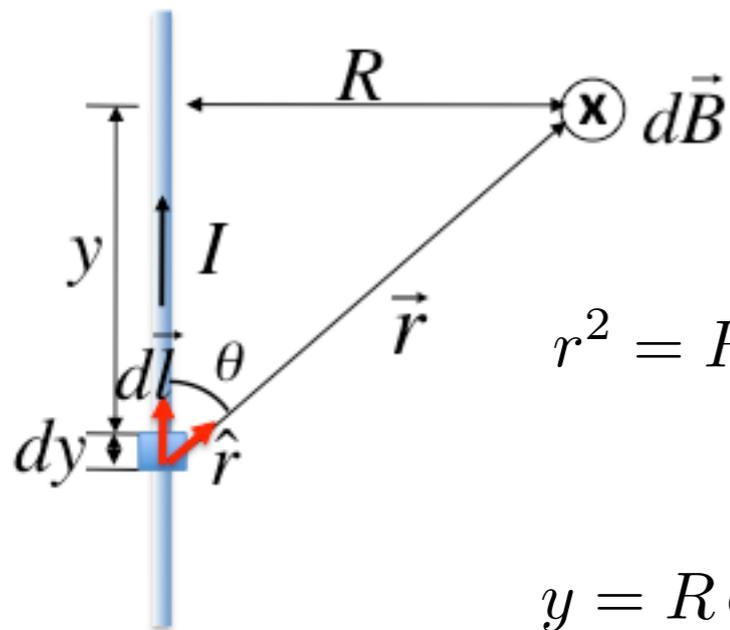
$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \right) \int \frac{id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Soma feita sobre todos os elementos de corrente

# MAGNETISMO PRODUZIDO POR CARGA EM MOVIMENTO

## APLICAÇÕES DE BIOT-SAVART

- Fio longo retilíneo



$$B = \int dB = \int \left( \frac{\mu_0 I}{4\pi} \right) \frac{dy \sin(\theta)}{r^2}$$

$$r^2 = R^2 + y^2; \quad \sin(\theta) = \frac{R}{r} \quad \Rightarrow \quad B = \left( \frac{\mu_0 I}{4\pi} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R dy}{(R^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$y = R \cot \theta \quad \Rightarrow \quad dy = -R \csc^2 \theta d\theta; \quad R^2 + y^2 = R^2 \csc^2 \theta \quad \Rightarrow$$

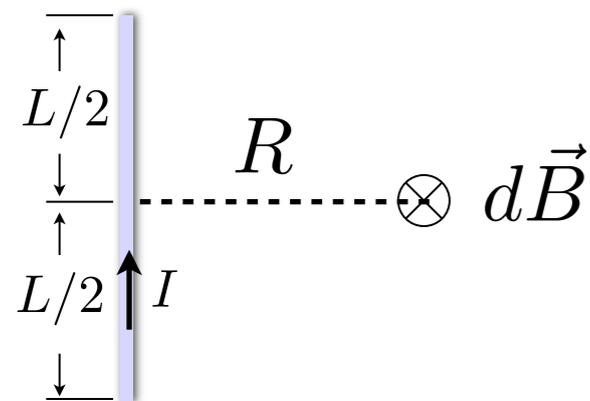
$$B = - \left( \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \right) \int \frac{d\theta}{\csc \theta} = - \left( \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \right) \int \sin \theta d\theta = \left( \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \right) \cos \theta = \left( \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \right) \frac{y}{(y^2 + R^2)^{1/2}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$\Rightarrow \quad B = \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \right)$$

# MAGNETISMO PRODUZIDO POR CARGA EM MOVIMENTO

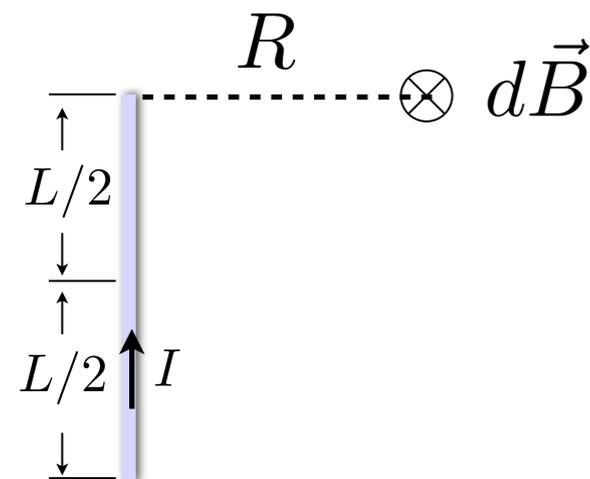
## APLICAÇÕES DE BIOT-SAVART

- Fio finito de comprimento  $L$  - Ponto  $P$  situado sobre a bissetriz do fio



$$B = \left( \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \right) \frac{y}{(y^2 + R^2)^{1/2}} \Bigg|_{-L/2}^{+L/2} = \frac{2L}{(L^2 + 4R^2)^{1/2}}$$

- Ponto  $P$  situado sobre um eixo perpendicular ao fio passando pelo topo do fio

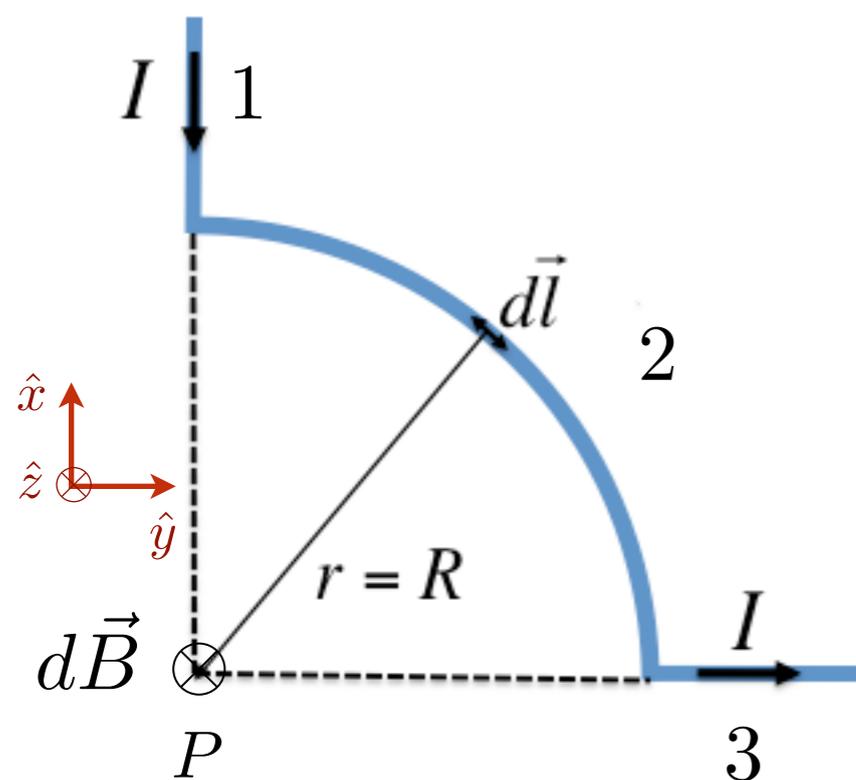


$$B = \left( \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \right) \frac{y}{(y^2 + R^2)^{1/2}} \Bigg|_{-L}^0 = \frac{L}{(L^2 + R^2)^{1/2}}$$

# MAGNETISMO PRODUZIDO POR CARGA EM MOVIMENTO

## APLICAÇÕES DE BIOT-SAVART

- Campo B no ponto P



Contribuições devido aos trechos 1 e 3 são nulas pois  $d\vec{\ell}$  e  $\vec{r}$  são paralelos:  $d\vec{B}_1 = d\vec{B}_3 = 0$  ( $\vec{r} \parallel \vec{B}$ )

$$d\vec{B} = \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{id\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3} = \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{id\ell \sin(\theta)}{r^2}$$

$$d\vec{B}_3 = \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{Id\ell}{R^2} \hat{z}; \quad d\ell = R d\theta \Rightarrow$$

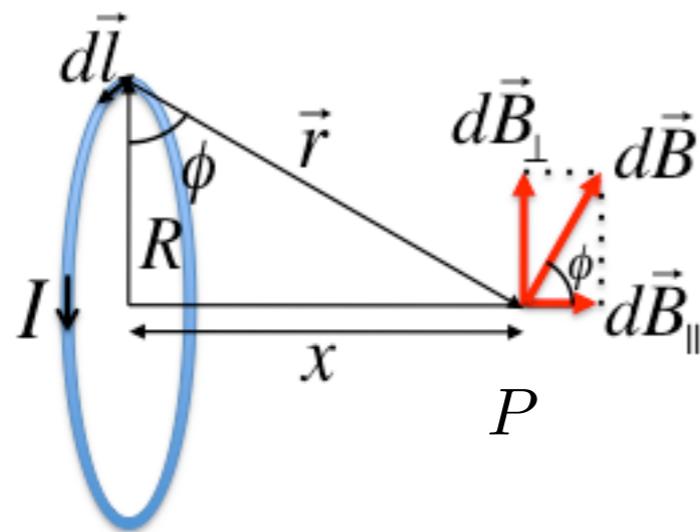
$$B_3 = \int dB_3 = \int \left( \frac{\mu_0 I}{4\pi} \right) \frac{R d\theta}{R^2} = \left( \frac{\mu_0 I}{4\pi} \right) \frac{\pi/2}{R} = \frac{\mu_0 I}{8R} \Rightarrow$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{8R} \hat{z}$$

# MAGNETISMO PRODUZIDO POR CARGA EM MOVIMENTO

## APLICAÇÕES DE BIOT-SAVART: ESPIRA CIRCULAR

- Campo B no ponto P



$$d\vec{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \frac{id\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3} \Rightarrow dB = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \frac{id\ell \sin \theta}{r^2}$$

$$d\vec{\ell} \perp \vec{r} \Rightarrow dB = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \frac{Id\ell}{r^2}$$

$$dB_{\parallel} = dB \cos \phi; \quad dB_{\perp} = dB \sin \phi$$

$$\cos \phi = \frac{R}{r}; \quad \sin \phi = \frac{x}{r}$$

$$\vec{B}_{\perp} = \int d\vec{B}_{\perp} = 0$$

$$\vec{B}_{\parallel} = \int d\vec{B}_{\parallel} = \int dB_{\parallel} \hat{x}$$

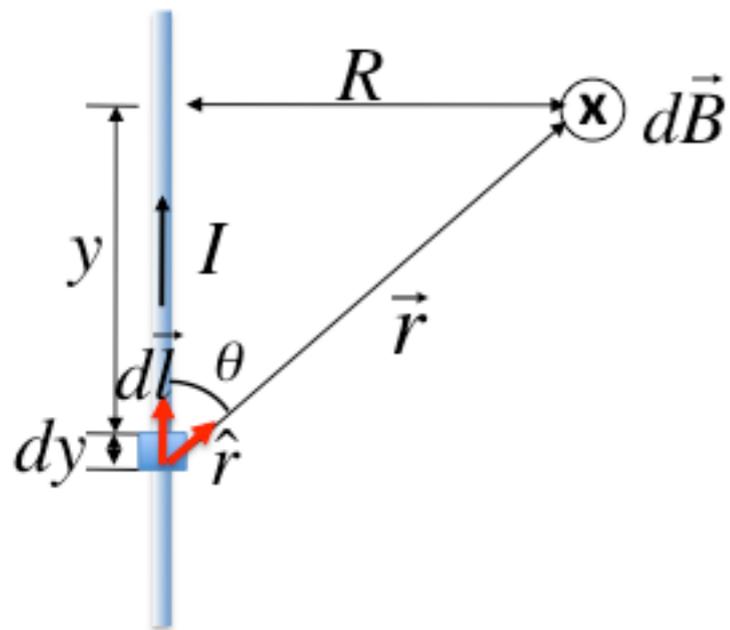
$$B_{\parallel} = \int dB_{\parallel} = \int dB \cos \phi = \int \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \left(\frac{Id\ell}{r^2}\right) \left(\frac{R}{r}\right) = \left(\frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3}\right) \int d\ell = \left(\frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3}\right) 2\pi R = \frac{\mu_0 IR^2}{2r^3}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp} = \frac{\mu_0 IR^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}} \hat{x}$$

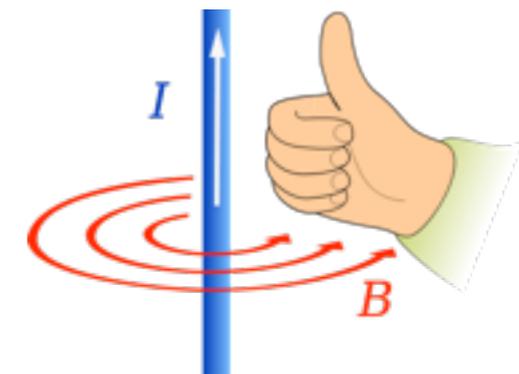
# MAGNETISMO PRODUZIDO POR CARGA EM MOVIMENTO

## LEI DE AMPÈRE

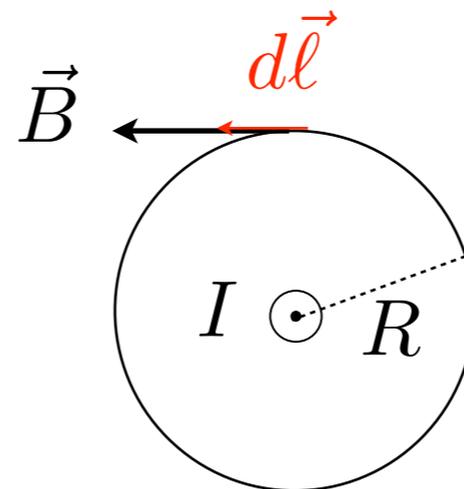
- Fio longo retilíneo: mostramos (usando a lei de Biot-Savart) que o campo  $B$  é dado por:



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



Vista de cima



Integrando ao longo de um circuito fechado de raio  $R$  obtemos:

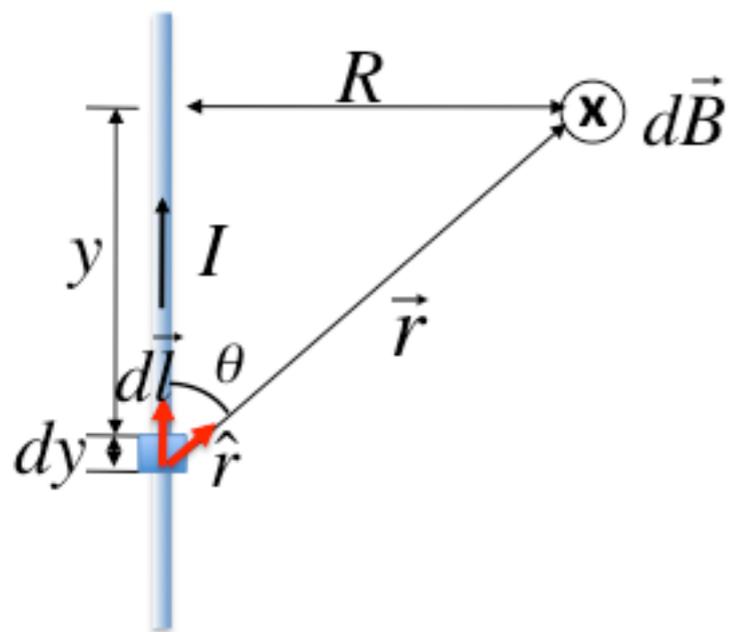
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

Lei de Ampère

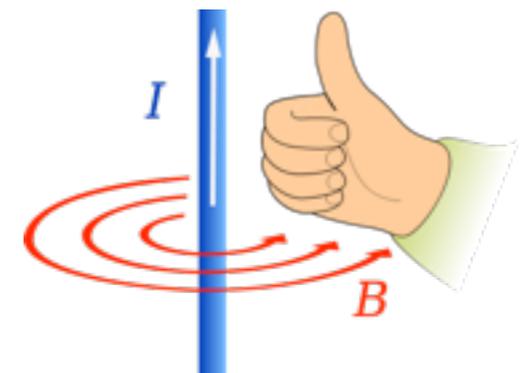
# MAGNETISMO PRODUZIDO POR CARGA EM MOVIMENTO

## LEI DE AMPÈRE

- Fio longo retilíneo: mostramos (usando a lei de Biot-Savart) que o campo  $B$  é dado por:

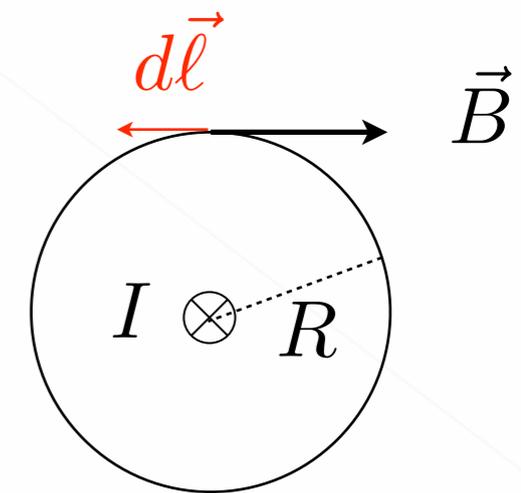
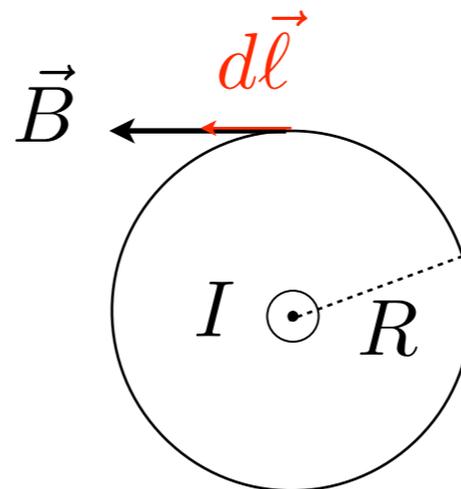


$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



Vista de cima 

analogamente



Integrando ao longo de um circuito fechado de raio  $R$  obtemos:

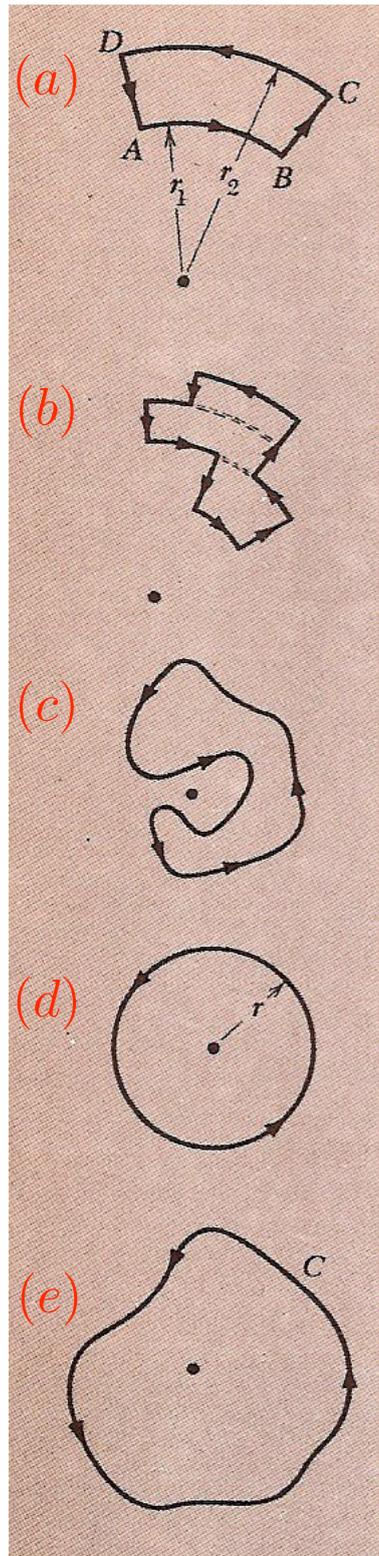
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

independe do raio  $R$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = -\mu_0 I$$

# MAGNETISMO PRODUZIDO POR CARGA EM MOVIMENTO

## LEI DE AMPÈRE



$$(a) \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad \int_{\bar{A}\bar{B}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = -B(r_1) L_{AB} = -B(r_1) r_1 \phi_{AB}$$

$$\int_{\bar{B}\bar{C}} = \int_{\bar{D}\bar{A}} = 0 \quad (\vec{B} \perp d\vec{\ell}) \quad \int_{\bar{C}\bar{D}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(r_2) L_{CD} = B(r_2) r_2 \phi_{CD}$$

$$B(r_1) r_1 = B(r_2) r_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}; \quad \phi_{AB} = \phi_{DC} \Rightarrow \int_{\bar{A}\bar{B}} = - \int_{\bar{C}\bar{D}}$$

$$(b) \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad (\text{Ao longo dos segmentos de círculos a integral não depende de } r)$$

$$(c) \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad (\text{Basta repartir o caminho em segmentos de círculos e radiais})$$

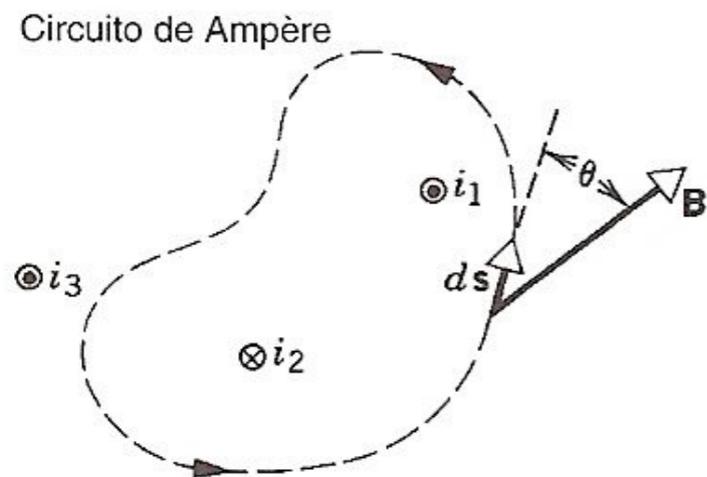
$$(d) \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

$$(e) \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

Lei de Ampère

# MAGNETISMO PRODUZIDO POR CARGA EM MOVIMENTO

## LEI DE AMPÈRE



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

$I$  - corrente que atravessa a área delimitada pelo circuito

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (i_1 - i_2)$$

É útil para calcular o campo magnético quando há simetrias evidentes

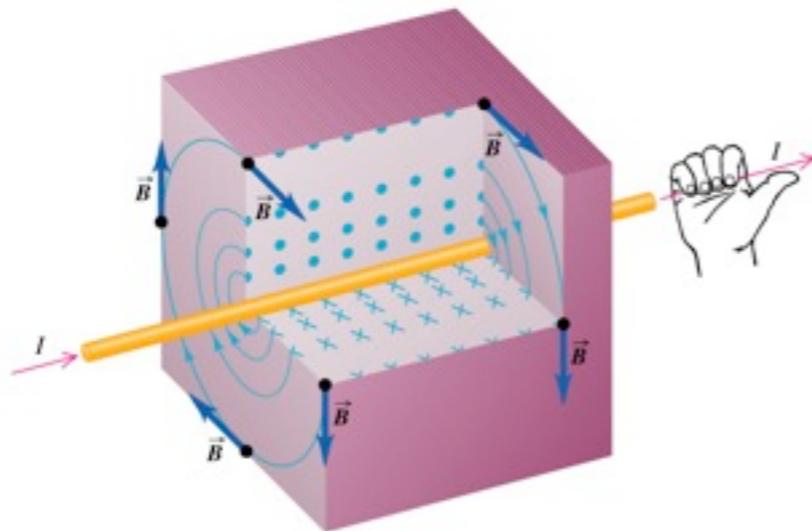
# MAGNETISMO PRODUZIDO POR CARGA EM MOVIMENTO

## APLICAÇÕES DA LEI DE AMPÈRE

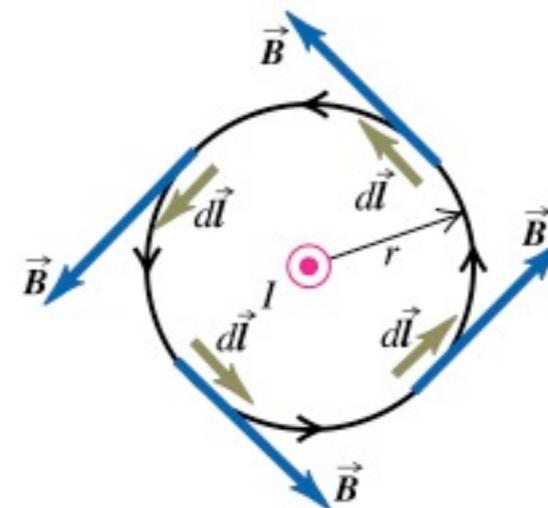
• Fio longo retilíneo:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

Lei de Ampère



Copyright © Addison Wesley Longman, Inc.



$$\vec{B} \parallel d\vec{\ell} \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B d\ell$$

$$B \text{ não muda em módulo ao longo do circuito} \Rightarrow \oint B d\ell = B \oint d\ell = B 2\pi r$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

# MAGNETISMO PRODUZIDO POR CARGA EM MOVIMENTO

## APLICAÇÕES DA LEI DE AMPÈRE

• Fio cilíndrico longo retilíneo:

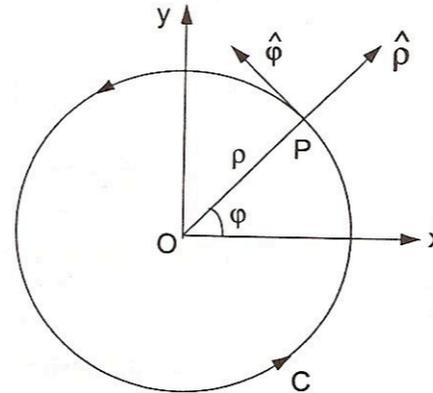
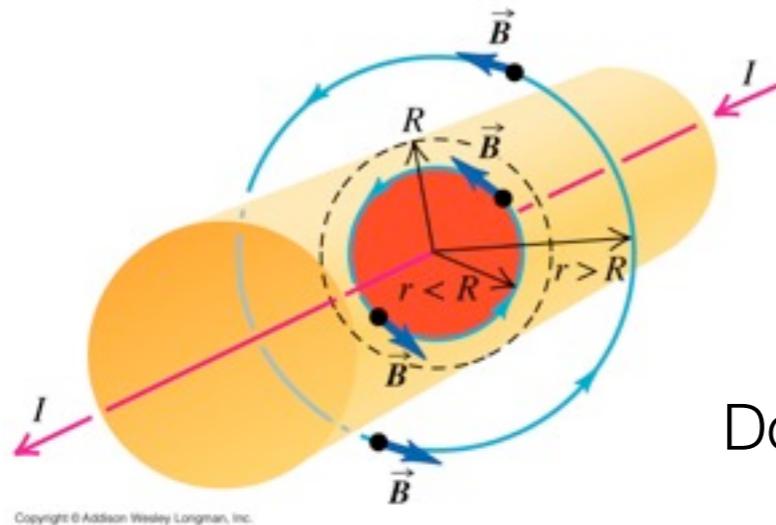


Figura 8.4 Secção transversal do fio

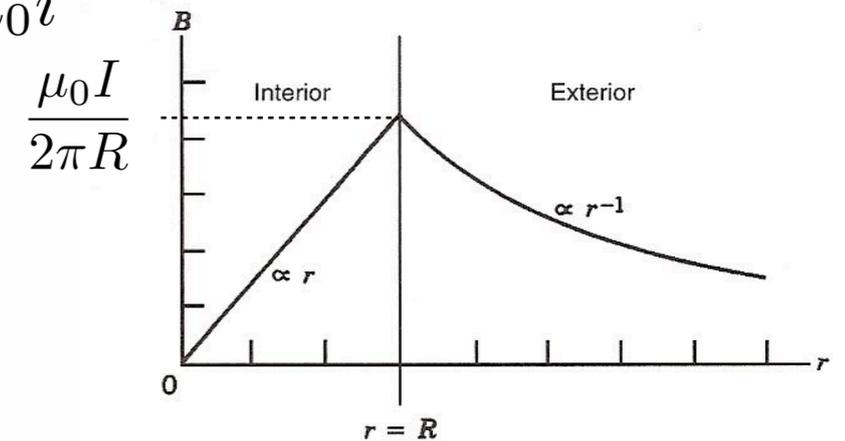
Lei de Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

Dois casos a considerar: (a)  $\rho > R$  (b)  $\rho < R$

$$\vec{B} \parallel d\vec{\ell} \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B dl = B \oint dl = B 2\pi\rho = \mu_0 i$$

(a)  $\rho > R$   $i = I \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$



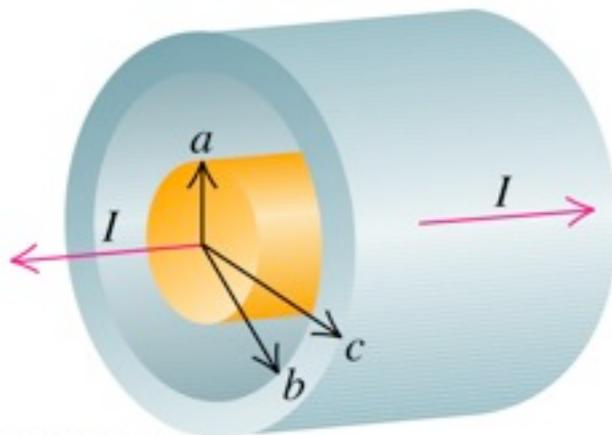
(b)  $\rho < R$   $i = j A = j \pi \rho^2 = \left( \frac{I}{\pi R^2} \right) \pi \rho^2 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I \rho^2}{2\pi R^2 \rho} = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi R^2}$

# MAGNETISMO PRODUZIDO POR CARGA EM MOVIMENTO

## APLICAÇÕES DA LEI DE AMPÈRE

• Cabo coaxial - quatro casos a considerar:

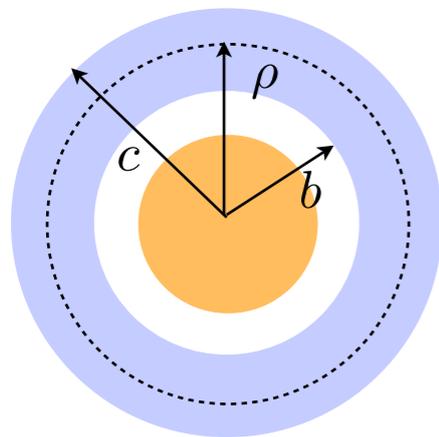
$$(a) \rho > c \quad (b) b < \rho < c \quad (c) a < \rho < b \quad (d) \rho < a$$



Simetria cilíndrica:

$$\vec{B} \parallel d\vec{\ell} \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B d\ell = B \oint d\ell = B 2\pi\rho = \mu_0 i$$

$$(a) \rho > c \quad i = I - I = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = 0}$$



$$(b) b < \rho < c \quad i = I - i_S \quad i_S = j A$$

$$j = \frac{I}{\pi(c^2 - b^2)}; \quad A = \pi(\rho^2 - b^2) \quad \Rightarrow \quad i_S = I \left( \frac{\rho^2 - b^2}{c^2 - b^2} \right)$$

$$i = I - i_S = I \left( 1 - \frac{\rho^2 - b^2}{c^2 - b^2} \right) = I \left( \frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2} \right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \left( \frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2} \right)}$$

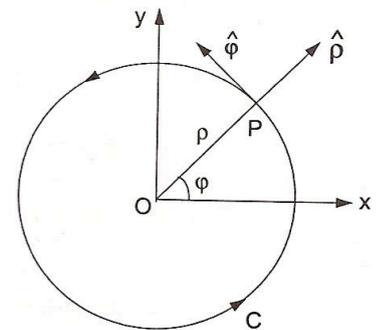
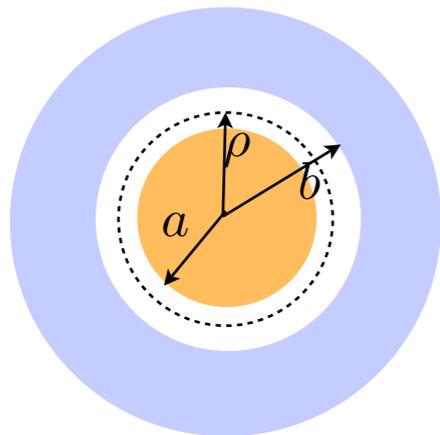


Figura 8.4 Seção transversal do fio

# MAGNETISMO PRODUZIDO POR CARGA EM MOVIMENTO

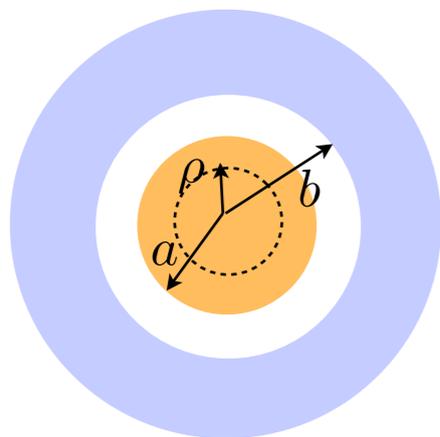
## APLICAÇÕES DA LEI DE AMPÈRE

• Cabo coaxial:



$$(c) \quad a < \rho < b \quad i = I \quad \Rightarrow$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho}$$



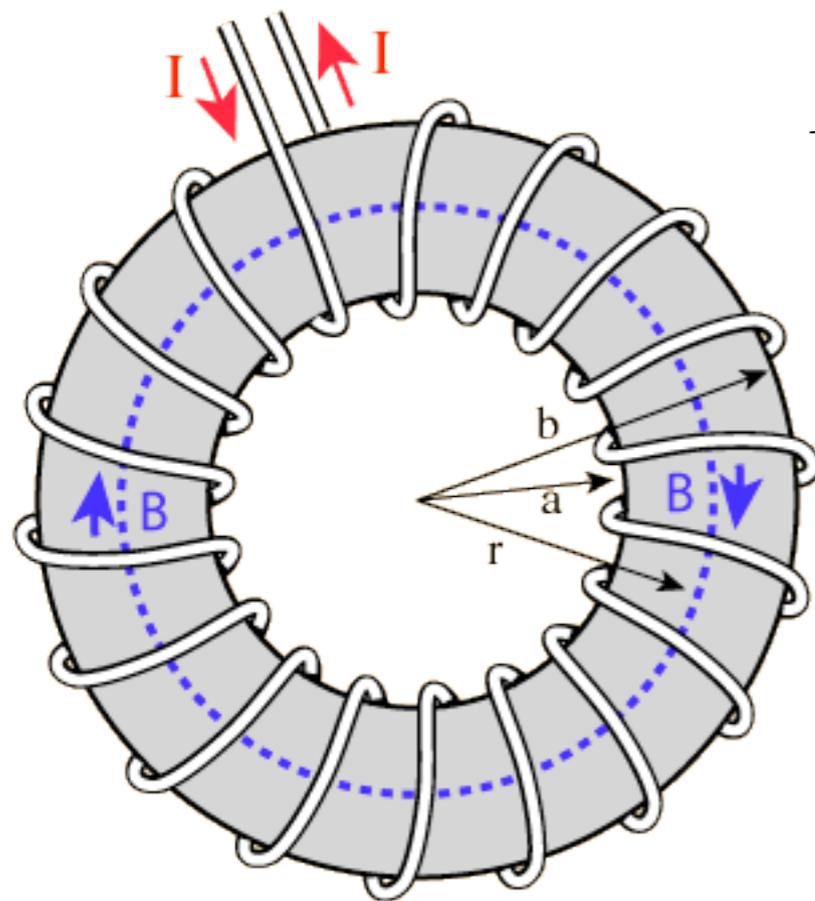
$$(b) \quad \rho < a \quad i = j A = j \pi \rho^2 = \left( \frac{I}{\pi a^2} \right) \pi \rho^2$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I \rho^2}{2\pi a^2 \rho} = \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2}$$

# MAGNETISMO PRODUZIDO POR CARGA EM MOVIMENTO

## APLICAÇÕES DA LEI DE AMPÈRE

- Toróide com  $N$  espiras: simetria circular



$$\vec{B} \parallel d\vec{\ell} \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B dl = B \oint dl = B 2\pi r = \mu_0 i$$

Três casos a considerar: (a)  $r < a$     (b)  $a < r < b$     (c)  $b < r$

Casos (a)  $r < a$  e (c)  $b < r$

$$i = 0$$

$\Rightarrow$

$$B = 0$$

Caso (b)  $a < r < b$

$$i = NI$$

$\Rightarrow$

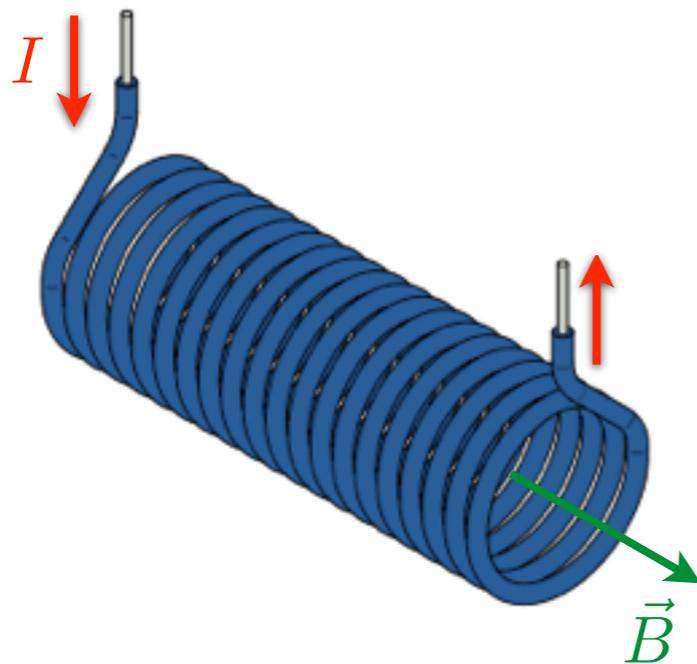
$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

Campo  $B$  confinado dentro do toróide

# MAGNETISMO PRODUZIDO POR CARGA EM MOVIMENTO

## APLICAÇÕES DA LEI DE AMPÈRE

- Solenóide com  $n$  espiras por unidade de comprimento:



$$\text{Raio médio do toróide: } R = \frac{a + b}{2}$$

$$\text{Comprimento do toróide: } L = 2\pi R$$

$$\text{No. médio de espiras do toróide: } n = \frac{N}{2\pi R}$$

$$\Rightarrow N = n 2\pi R$$

$$\text{Nesse caso, o campo no toróide: } B = \frac{\mu_0 n I R}{r} \quad (a < r < b); \quad B = 0 \quad (r < a \ \& \ r > b)$$

Tomando os limites  $\lim a \rightarrow \infty$ ,  $\lim b \rightarrow \infty \Rightarrow \lim R \rightarrow \infty$ , porém,

mantendo fixo o diâmetro do toróide ( $d = b - a$ ), obtemos:

$$a < r < b \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{r}{R} \right) = 1 \quad r = a + x \quad (x < d)$$

# MAGNETISMO PRODUZIDO POR CARGA EM MOVIMENTO

## APLICAÇÕES DA LEI DE AMPÈRE: SOLENÓIDE

$$r = a + x \quad (x < d)$$

$$R = \frac{a + b}{2}; \quad b = a + d \quad \Rightarrow \quad R = \frac{2a + d}{2}$$

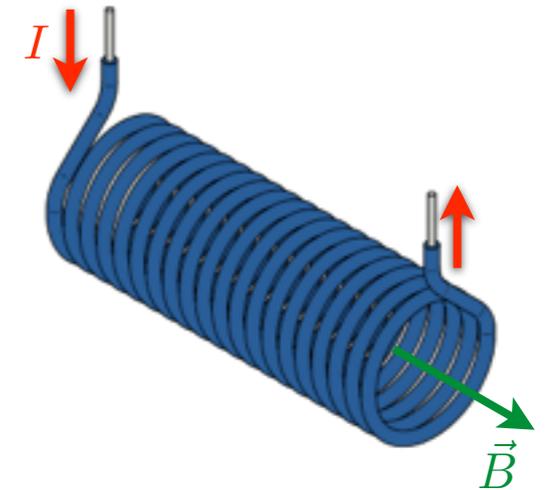
$$a < r < b \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{r}{R} \right) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left( \frac{a + x}{\frac{2a + d}{2}} \right) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + \frac{x}{a}}{1 + \frac{d}{2a}} \right) = 1$$

Lembrando que o campo no toróide:

$$B = \frac{\mu_0 n I R}{r} \quad (a < r < b); \quad B = 0 \quad (r < a \text{ \& } r > b)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} B(r) = \mu_0 n I \quad (\text{dentro do solenóide}) \text{ e } B(r) = 0 \quad (\text{fora do solenóide})$$

Note que dentro do solenóide o campo é uniforme (não depende de r)



# MAGNETISMO PRODUZIDO POR CARGA EM MOVIMENTO

## APLICAÇÕES DA LEI DE AMPÈRE

- Solenóide com  $n$  espiras por unidade de comprimento:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 i \quad \leftarrow \text{Lei de Ampère}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{ab} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{bc} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{cd} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_{da} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\int_{ab} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{ab} B d\ell = B \int_{ab} d\ell = B h$$

$$\int_{bc} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{da} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad (\vec{B} \perp d\vec{\ell})$$

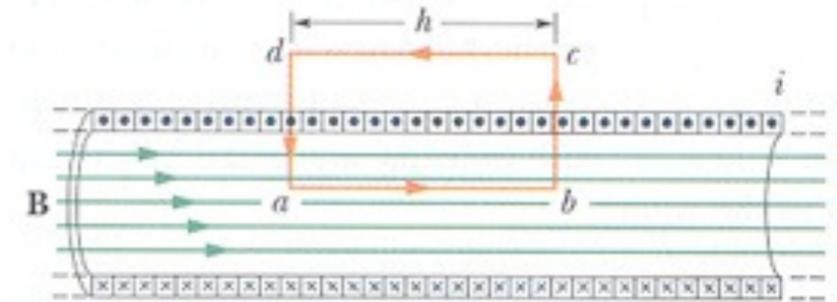
$$\int_{cd} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0 \quad (B = 0) \quad \Rightarrow \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B h = \mu_0 i$$

$$i = NI = nhI$$

$$\Rightarrow Bh = \mu_0 nhI \quad \Rightarrow$$

$$B = \mu_0 nI \quad \text{dentro}$$

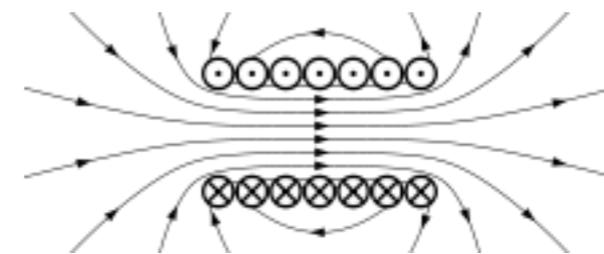
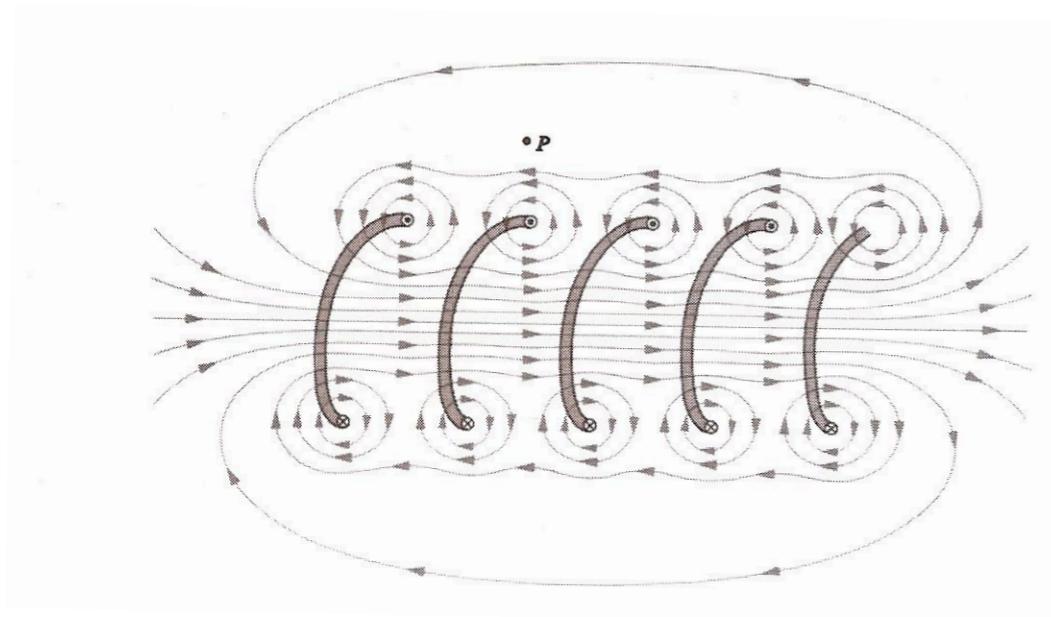
$$B = 0 \quad \text{fora}$$



# MAGNETISMO PRODUZIDO POR CARGA EM MOVIMENTO

## APLICAÇÕES DA LEI DE AMPÈRE

- Solenóide finito de comprimento  $h$ :

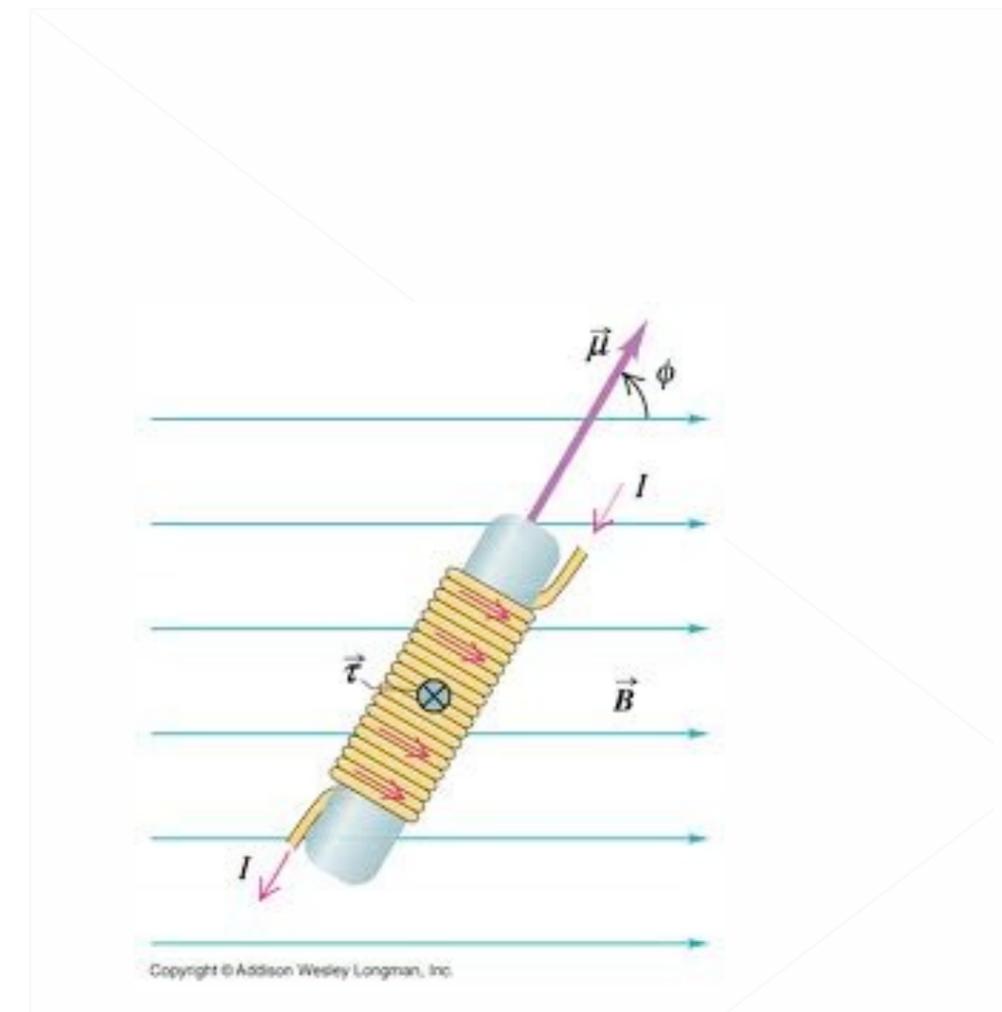


- Momento de dipolo:

$$\text{Área das espiras: } A = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$\text{No. de espiras do solenóide: } N = n h$$

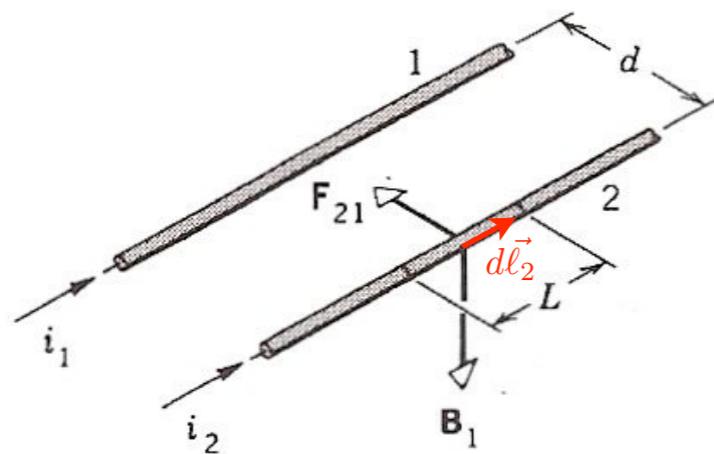
$$\vec{\mu} = \mu \hat{\mu} \quad \mu = N I A = \left( \frac{n h I d^2}{4} \right)$$



# MAGNETISMO PRODUZIDO POR CARGA EM MOVIMENTO

## FORÇA ENTRE FIOS CONDUTORES

- Dois fios muito longos, paralelos, percorridos por correntes elétricas  $i_1$  e  $i_2$ :



Campo magnético que o fio 1 faz no fio 2:

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d}$$

Força que o fio 1 faz em um elemento do fio 2:

$$d\vec{F}_{21} = i_2 d\vec{\ell}_2 \times \vec{B}_1$$

$$d\vec{\ell}_2 \perp \vec{B}_1 \quad \Rightarrow \quad d\vec{\ell}_2 \times \vec{B}_1 = d\ell_2 B_1 \quad \Rightarrow \quad dF_{21} = i d\ell_2 B_1$$

$$\Rightarrow \frac{dF_{21}}{d\ell_2} = i_2 B_1 = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d}$$

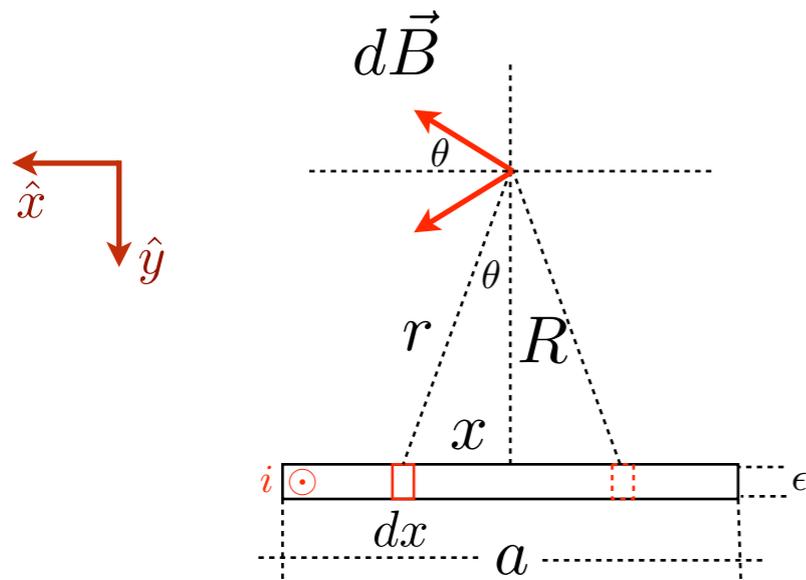
$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

**(a) Calcule  $dF_{12}/d\ell_1$  e verifique o seu sentido; (b) Analise o caso em que  $i_1$  e  $i_2$  tem sentidos opostos**

# MAGNETISMO PRODUZIDO POR CARGA EM MOVIMENTO

## TIRA CONDUTORA

- Tira condutora de largura  $a$ , percorrida por corrente  $i$ :



$$dB = \frac{\mu_0 di}{2\pi r} \quad dB_x = dB \cos \theta; \quad dB_y = dB \sin \theta$$

$$j = \frac{i}{A} = \frac{i}{a\epsilon} \quad di = j dA = j \epsilon dx = \frac{i}{a\epsilon} \epsilon dx = \frac{idx}{a}$$

$$\cos \theta = \frac{R}{r}; \quad \sin \theta = \frac{x}{r}; \quad \tan \theta = \frac{x}{R}$$

$$B_y = \int dB_y = 0$$

$$B_x = \int dB_x = \int \left( \frac{\mu_0}{2\pi r} \right) \left( \frac{idx}{a} \right) \cos \theta = \int \left( \frac{\mu_0}{2\pi r} \right) \left( \frac{idx}{a} \right) \frac{R}{r} = \frac{\mu_0 i R}{2\pi a} \int \frac{dx}{x^2 + R^2}$$

$$x = R \tan \theta \Rightarrow dx = R \sec^2 \theta d\theta; \quad x^2 + R^2 = R^2(1 + \tan^2 \theta) = R^2 \sec^2 \theta \Rightarrow$$

$$B_x = \frac{\mu_0 i R^2}{2\pi a R^2} \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sec^2 \theta} = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} \int d\theta = \frac{\mu_0 i}{2\pi a} 2\theta_0 = \frac{\mu_0 i}{\pi a} \theta_0 = \frac{\mu_0 i}{\pi a} \tan^{-1} \left( \frac{a}{2R} \right)$$

# MAGNETISMO PRODUZIDO POR CARGA EM MOVIMENTO

## TIRA CONDUTORA: DOIS LIMITES

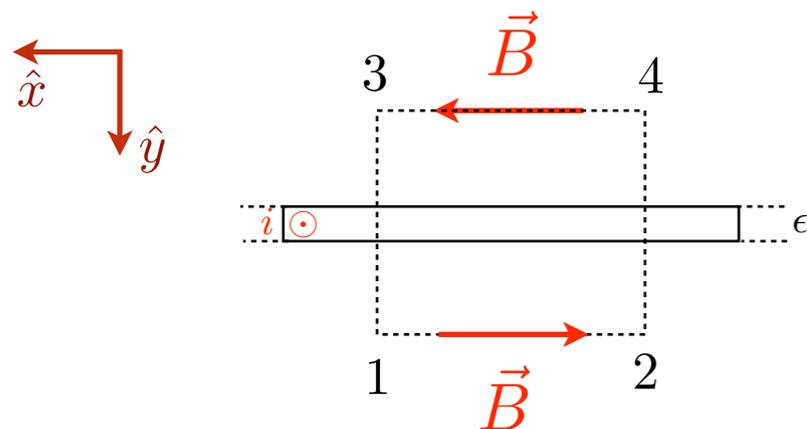
$$\vec{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} = \frac{\mu_0 i}{\pi a} \tan^{-1} \left( \frac{a}{2R} \right) \hat{x}$$

- Dois limites: (a)  $\lim R \gg a$  (b)  $\lim a \rightarrow \infty$

(a)  $\lim R \gg a \quad \tan^{-1} \left( \frac{a}{2R} \right) \approx \frac{a}{2R} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}$  ← Campo de um fio longo

(b)  $\lim a \rightarrow \infty \quad \tan^{-1} \left( \frac{a}{2R} \right) \rightarrow \frac{\pi}{2}; \quad j = \frac{i}{a\epsilon} \Rightarrow B_x \approx \frac{\mu_0 j \epsilon}{2}$  ← Campo de um plano infinito. Obs: campo uniforme

- O caso (b) pode ser obtido diretamente pela lei de Ampère  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$



$$\int_{12} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{34} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = BL$$

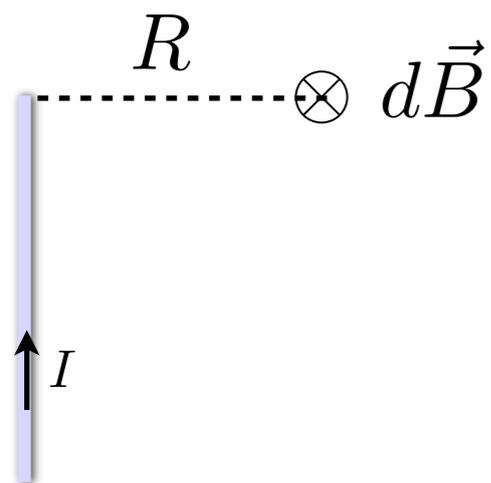
$$\int_{23} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_{41} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2BL = \mu_0 I = \mu_0 j L \epsilon \Rightarrow B = \frac{\mu_0 j \epsilon}{2}$$

# MAGNETISMO PRODUZIDO POR CARGA EM MOVIMENTO

## APLICAÇÕES DE BIOT-SAVART

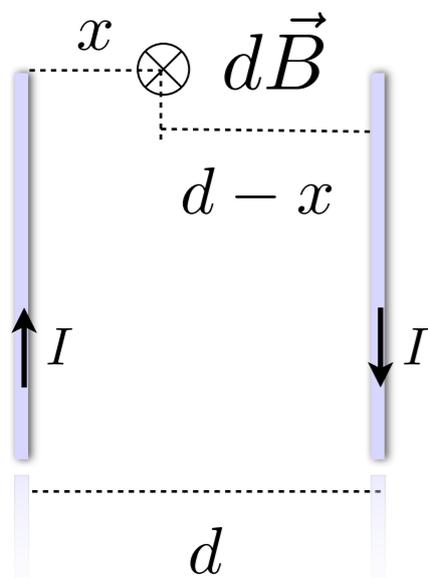
- Fio semi-finito: Ponto P situado sobre um eixo perpendicular ao fio passando pelo topo



$$B = \lim_{L \rightarrow \infty} \left( \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \right) \frac{L}{(L^2 + R^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

Note que esse valor é metade do valor correspondente ao do fio infinito: resultado que poderia ter sido obtido diretamente com argumentos de simetria.

- Dois fios semi-finitos paralelos separados por uma distância d: ponto P situado sobre um eixo perpendicular ao fio passando pelos topos dos fios



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{d-x} \right)$$