Cap 4: Potencial Elétrico

1) Energia potencial elétrica:

Consideremos um par de partículas carregadas (com cargas positivas, por exemplo) separadas por uma pequena distância d, conforme a ilustração abaixo.

Suponha que a carga q_1 esteja fixa na posição representada na figura, mas que a carga q_2 não esteja vinculada à posição da figura. Como a carga q_1 exerce uma força elétrica sobre q_2, esta carga entrará em movimento. Em outras palavras, a carga q_2 passa a ter energia cinética. Portanto, a pergunta natural a ser feita é: qual energia foi transformada em energia cinética? Ao longo deste capítulo, elaboraremos a resposta para esta pergunta introduzindo o conceito de energia potencial elétrica e potencial elétrico.

Para introduzirmos o conceito de energia potencial elétrica, vamos fazer uma analogia com o campo gravitacional. Como sabemos, a energia mecânica de um sistema,

$$E_{MEC} = K + U,$$

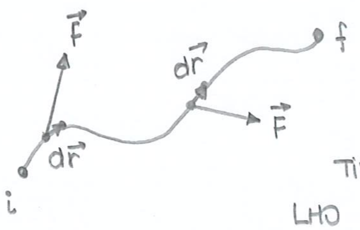
dada pela soma da energia cinética com a energia potencial, é conservada se as partículas do sistema interagem por meio de forças conservativas. Neste caso, a variação da energia potencial é dada pelo negativo do trabalho realizado pelas forças (conservativas) de interação:

$$\Delta U = U_f - U_i = -W.$$

O trabalho de uma força constante é

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = |\vec{F}||\Delta\vec{r}|\cos\theta,$$

onde $\Delta\vec{r}$ denota o vetor de um deslocamento linear e θ é o ângulo entre $\vec{F}$ e $\Delta\vec{r}$. No caso de uma trajetória curva e uma força variável, o trabalho é calculado pela soma dos trabalhos ao longo de deslocamentos infinitesimais, i.e.,

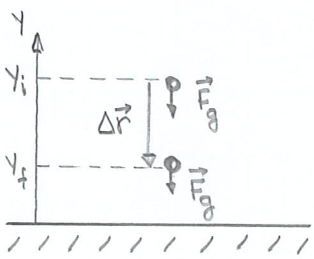


$$W = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Uma força conservativa é tal que o trabalho independe do caminho percorrido de i até f.

Iremos provar mais tarde que a força elétrica é uma força conservativa.

Ex: Consideremos uma partícula de massa m nas vizinhanças da superfície da Terra como mostra a ilustração:



$$W = |\vec{F}_g||\Delta\vec{r}| = $$
$$= mg|y_f - y_i|$$
$$= mgy_i - mgy_f$$

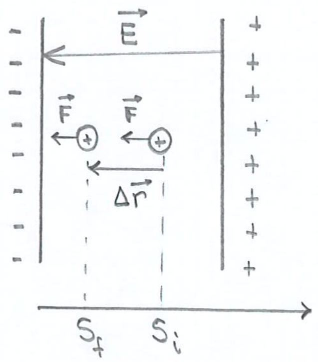
POR OUTRO LADO,

$$\Delta U = U_f - U_i = -W = mgy_f - mgy_i$$

$$\Longrightarrow \boxed{U_{grav} = U_0 + mgy} \; ,$$

ONDE U_0 É UM VALOR DE REFERÊNCIA, FISICAMENTE IRRELEVANTE.

DE MANEIRA ANÁLOGA, CONSIDEREMOS UMA CARGA POSITIVA COLOCADA NO INTERIOR DE UM CAPACITOR DE PLACAS PARALELAS:



$$W = |\vec{F}||\Delta\vec{r}| =$$
$$= q|\vec{E}||S_f - S_i|$$
$$= q|\vec{E}|S_i - q|\vec{E}|S_f$$

ASSUMINDO QUE A FORÇA É CONSERVATIVA,

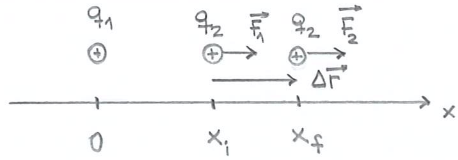
$$-W = \Delta U \Longrightarrow q|\vec{E}|S_f - q|\vec{E}|S_i = U_f - U_i$$

$$\Longrightarrow \boxed{U_{elet} = U_0 + q|\vec{E}|S} \; ,$$

ONDE U_{elet} É A ENERGIA POTENCIAL ELÉTRICA, U_0 É UM VALOR DE REFERÊNCIA, $\vec{E}$ É UM CAMPO ELÉTRICO UNIFORME E S MEDE A DISTÂNCIA DA PARTÍCULA ATÉ A PLACA NEGATIVA.

2) ENERGIA POTENCIAL CRIADA POR UMA CARGA PUNTIFORME

VAMOS CONSIDERAR UMA CARGA q_1 FIXA E UMA CARGA q_2 QUE É LIVRE PARA SE MOVER:



O TRABALHO DA FORÇA QUE q_1 EXERCE SOBRE q_2 É :

$$W_{elet} = \int_{x_i}^{x_f} |\vec{F}|\, dx = \int_{x_i}^{x_f} k\,\frac{q_1 q_2}{x^2}\, dx =$$

$$= k\, q_1 q_2 \int_{x_i}^{x_f} \frac{dx}{x^2} = k q_1 q_2 \left(-\frac{1}{x}\right|_{x_i}^{x_f}$$

$$= -k\,\frac{q_1 q_2}{x_f} + k\,\frac{q_1 q_2}{x_i}$$

MAS,

$$\Delta U = -W_{elet} \;\therefore\; U_f - U_i = k\,\frac{q_1 q_2}{x_f} - k\,\frac{q_1 q_2}{x_i}$$

$$\Longrightarrow \boxed{U_{elet} = k\,\frac{q_1 q_2}{x} + U_0}$$

TIPICAMENTE, ADOTA-SE $U_0 = 0$, I.E., A ENERGIA POTENCIAL ELÉTRICA NO INFINITO SE ANULA.

PORTANTO, A ENERGIA POTENCIAL ELÉTRICA É EXPRESSA COMO

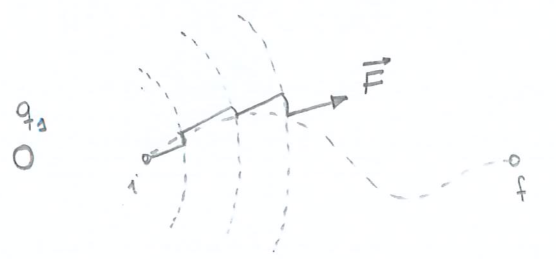
$$\boxed{U_{elet} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{r}}$$

ONDE r É A DISTÂNCIA ENTRE AS PARTÍCULAS.

OBS.: A EXPRESSÃO ACIMA FOI DERIVADA ASSUMINDO QUE AS CARGAS SÃO PUNTIFORMES. ENTRETANTO, COMO O CAMPO PRODUZIDO POR ESFERAS É O MESMO PRODUZIDO POR CARGAS PUNTIFORMES, A EXPRESSÃO É A MESMA E r SE REFERE À DISTÂNCIA ENTRE OS CENTROS DA ESFERAS.

Podemos argumentar que a força elétrica é conservativa. Isto significa que o cálculo do trabalho realizado pela força elétrica independe da trajetória em questão. O argumento pode ser construído da seguinte maneira: considere a situação de duas cargas como descrito anteriormente, mas assuma uma trajetória curvilínea para a carga q_2:

Podemos, agora, subdividir a trajetória em segmentos radiais e arcos circulares, como mostra a figura abaixo.



A força elétrica é radial (é uma força central). Isto significa que o deslocamento radial é paralelo à força, enquanto o deslocamento sobre os arcos são normais à força. Portanto, o trabalho realizado pela força elétrica ao longo dos arcos é zero. Por outro lado, podemos calcular o trabalho total somando os trabalhos ao longo dos segmentos radiais. Isto é equivalente ao cálculo ao longo da trajetória retilínea que liga i à f.

$\Rightarrow$ A força elétrica é conservativa.

Múltiplas cargas puntiformes:

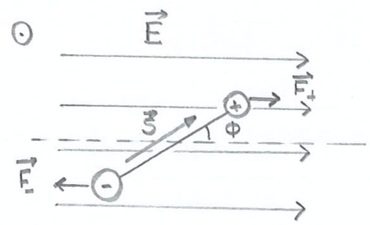
No caso de várias cargas puntiformes, a energia potencial será a soma das energias potenciais de todos os pares:

$$U_{elet} = \sum_{i<j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}},$$

onde r_{ij} denota a distância entre as cargas q_i e q_j.

3) Energia potencial de um dipolo

Seja um dipolo elétrico em um campo uniforme $\vec{E}$:



Considere um eixo perpendicular ao plano da folha apontando para fora.

O torque sobre o dipolo vale

$$\vec{\tau} = -|\vec{p}||\vec{E}| \operatorname{sen}\phi \, \hat{z}$$

Uma variação angular pode ser definida pelo vetor $d\vec{\phi} = d\phi \, \hat{z}$. Assim:

$$dW_{elet} = \vec{\tau} \cdot d\vec{\phi} = -|\vec{p}||\vec{E}| \operatorname{sen}\phi \, d\phi .$$

Para uma rotação de ϕ_i para ϕ_f, o trabalho total é:

$$W_{elet} = -|\vec{p}||\vec{E}| \int_{\phi_i}^{\phi_f} \operatorname{sen}\phi \, d\phi =$$

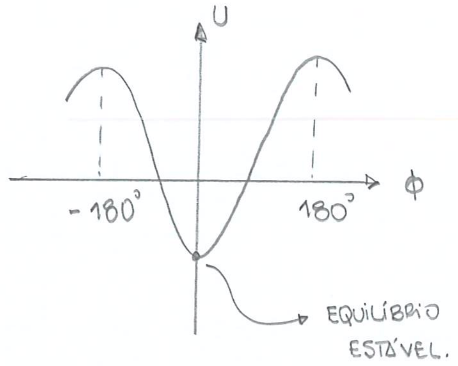
$$= -|\vec{p}||\vec{E}| \left(-\cos\phi \right|_{\phi_i}^{\phi_f} =$$

$$= |\vec{p}||\vec{E}| \cos\phi_f - |\vec{p}||\vec{E}| \cos\phi_i$$

A ENERGIA POTENCIAL É:

$$\Delta U_{dipolo} = U_f - U_i = -|\vec{p}||\vec{E}|\cos\phi_f + $$
$$+ |\vec{p}||\vec{E}| \,\mathrm{SEN}\,\phi_i$$

$$\Longrightarrow \quad U_{dipolo} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$



4) POTENCIAL ELÉTRICO

QUANDO DEFINIMOS O CAMPO ELÉTRICO, INTERPRETAMOS TAL VETOR COMO SENDO UM VETOR AUXILIAR PARA O CÁLCULO DA FORÇA ELÉTRICA. PORÉM, ESTE CAMPO PASSOU A TER UMA INTERPRETAÇÃO FÍSICA COMO SENDO A ENTIDADE NA QUAL, QUANDO UMA CARGA DE PROVA É IMERSA, UMA FORÇA ELÉTRICA PASSA A ATUAR SOBRE A CARGA.

DE FORMA SEMELHANTE, PODEMOS DEFINIR UMA QUANTIDADE AUXILIAR PARA O CÁLCULO DA ENERGIA POTENCIAL, QUE ENVOLVE APENAS AS CARGAS DE UMA DISTRIBUIÇÃO FIXA, MAS NÃO A CARGA DE PROVA. ESTA QUANTIDADE É DENOMINADA POTENCIAL ELÉTRICO.

POR DEFINIÇÃO, O POTENCIAL ELÉTRICO V É DADO POR

$$V = \frac{U}{q},$$

ONDE U É A ENERGIA POTENCIAL ELÉTRICA DO SISTEMA CARGA q + DISTRIBUIÇÃO FIXA DE CARGAS E q É A INTENSIDADE DA CARGA DE PROVA. O POTENCIAL ELÉTRICO É UMA PROPRIEDADE DA DISTRIBUIÇÃO DE CARGAS, I.E., INDEPENDE DA CARGA DE PROVA.

EM COMPLETA ANALOGIA AO CASO DO CAMPO ELÉTRICO, O POTENCIAL ELÉTRICO PODE SER VISTO COMO UMA FERRAMENTA AUXILIAR PARA O CÁLCULO DA ENERGIA POTENCIAL ELÉTRICA (NO CASO DO CAMPO ELÉTRICO, PARA O CÁLCULO DA FORÇA). PORTANTO, USUALMENTE, ESCREVEMOS A ENERGIA POTENCIAL ELÉTRICA COMO

$$\boxed{U = qV}$$

A UNIDADE DE MEDIDA DO POTENCIAL ELÉTRICO É VOLT (= J/C) E É DENOTADA POR V.

COMO A ENERGIA POTENCIAL ELÉTRICA É CALCULADA EM FUNÇÃO DO POTENCIAL ELÉTRICO, UMA PARTÍCULA CARREGADA ACELERA (OU DESACELERA) QUANDO SUBMETIDA À UMA DIFERENÇA DE POTENCIAL ΔV. ISTO SE DEVE À:

$$\Delta K + \Delta U = \Delta K + q\Delta V = 0.$$

SUPONHAMOS $q > 0$. NESTE CASO,

$$\Delta K = -q \Delta V$$

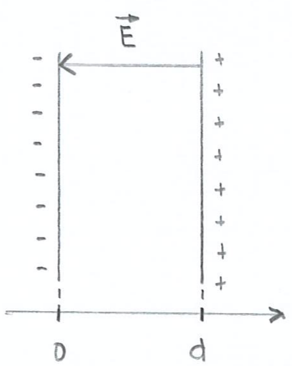
$$\Rightarrow \Delta K > 0 \text{ SE } \Delta V < 0$$
$$\Delta K < 0 \text{ SE } \Delta V > 0$$

OU SEJA, A PARTÍCULA ACELERA NA DIREÇÃO DE UM POTENCIAL MAIOR PARA UM POTENCIAL MENOR E DESACELERA NA DIREÇÃO DE UM POTENCIAL MENOR PARA UM POTENCIAL MAIOR. A EXPRESSÃO ACIMA PODE SER ESCRITA COMO,

$$K_f - K_i = -q(V_f - V_i)$$

$$\Rightarrow \boxed{K_f + qV_f = K_i + qV_i}$$

5) POTENCIAL ELÉTRICO NO INTERIOR DE UM CAPACITOR DE PLACAS PARALELAS



CAMPO ELÉTRICO NO INTERIOR DO CAPACITOR É UNIFORME (DA DIREITA PARA ESQUERDA) COM MÓDULO

$$|\vec{E}| = \frac{\eta}{\epsilon_0},$$

ONDE η É A DENSIDADE (UNIFORME) DE CARGAS.

PARA UMA CARGA q SITUADA NO INTERIOR DO CAPACITOR, A ENERGIA POTENCIAL ELÉTRICA DEVIDA À INTERAÇÃO ENTRE A CARGA E O CAMPO DO CAPACITOR É

$$U = q|\vec{E}|x,$$

ONDE x É A DISTÂNCIA DA PARTÍCULA ATÉ A PLACA NEGATIVA E A CONSTANTE U_0 FOI ESCOLHIDA COMO SENDO ZERO.

A PARTIR DESTA EXPRESSÃO, O POTENCIAL ELÉTRICO PODE SER CALCULADO, I.E.,

$$V = \frac{U}{q} = |\vec{E}|x.$$

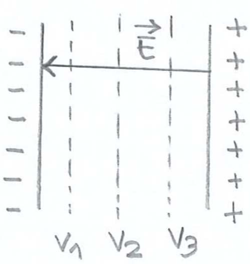
NA PLACA NEGATIVA, O POTENCIAL $V = V_- = 0$. JÁ NA PLACA POSITIVA, $V = V_+ = |\vec{E}|d$. PORTANTO, PODEMOS DEFINIR A DIFERENÇA DE POTENCIAL ΔV_C ENTRE AS PLACAS,

$$\boxed{\Delta V_c = V_+ - V_- = |\vec{E}|d}$$

FREQUENTEMENTE, ESSA DIFERENÇA DE POTENCIAL É DENOMINADA "VOLTAGEM". MUITAS VEZES, UTILIZAMOS A EQUAÇÃO ACIMA COMO FORMA PRÁTICA DE OBTER O MÓDULO DO CAMPO ELÉTRICO NO INTERIOR DE UM CAPACITOR EM TERMOS DA VOLTAGEM, I.E.,

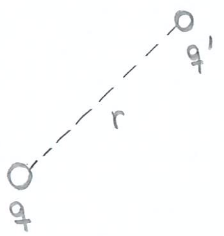
$$|\vec{E}| = \frac{\Delta V_c}{d}.$$

UM CONCEITO ABSTRATO BASTANTE USADO NA PRÁTICA É O DE SUPERFÍCIES EQUIPOTENCIAIS. ESSAS SÃO SUPERFÍCIES ABSTRATAS/MATEMÁTICAS ONDE O POTENCIAL ELÉTRICO TEM O MESMO VALOR. NO CASO DE UM CAPACITOR DE PLACAS PARALELAS, ESSAS SUPERFÍCIES SÃO PLANOS PARALELOS AOS PLANOS DO CAPACITOR, COMO MOSTRA A FIGURA ABAIXO:



6) Potencial elétrico criado por uma carga puntiforme

Consideremos um sistema composto por duas cargas q e q'. A carga q se mantém fixa enquanto a carga q' pode se deslocar. A energia potencial elétrica de q' devida à presença de q é:



$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q q'}{r}.$$

A partir disto, definimos o potencial elétrico de q por,

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r} = \frac{U}{q'}.}$$

Neste caso, se a carga q' fosse trocada por uma carga q'', a energia potencial elétrica de q'' devido à q seria dada por

$$U = q'' V.$$

Em outras palavras, o potencial V é uma quantidade auxiliar para o cálculo da energia potencial elétrica de uma carga de prova que interage com q (carga fonte).

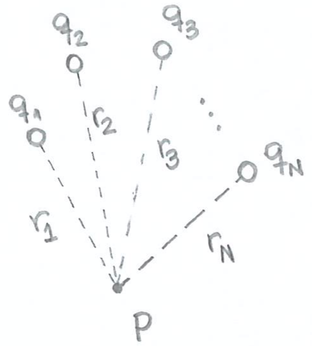
Neste caso, as superfícies equipotenciais são esferas cujos centros geométricos coincidem com a carga fonte.

No caso de uma esfera maciça uniformemente carregada com carga Q, o potencial a uma distância r do centro da esfera tal que $r > R$ (com R sendo o raio da esfera) é:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}.$$

7) Potencial elétrico criado por várias cargas puntiformes

Seja uma distribuição de N cargas $q_1, \ldots, q_N$ como na figura abaixo. O potencial elétrico devido à essa distribuição no ponto P é dado por



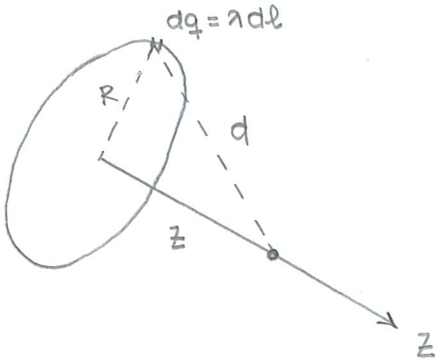
$$V = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_i}{r_i},$$

i.e., o potencial elétrico é a soma de cada potencial produzido individualmente por cada uma das cargas da distribuição.

Caso a distribuição de cargas possa ser aproximada por uma distribuição contínua de cargas, a estratégia para o cálculo do potencial é bem parecida com a adotada para o cálculo do campo elétrico produzido por uma distribuição contínua de cargas: a distribuição de cargas é particionada em cargas infinitesimais que contribuem como cargas puntiformes. A soma sobre todas as contribuições é aproximada por uma integral.

EXEMPLO: POTENCIAL CRIADO POR UM ANEL DE CARGA

CONSIDERE UM ANEL FINO, UNIFORMEMENTE CARREGADO E DE RAIO R COM CARGA Q. DETERMINE O POTENCIAL A UMA DISTÂNCIA Z SOBRE O EIXO DO ANEL.



$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{d} \quad , \text{ mas } \quad d = \sqrt{R^2+z^2}$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{R^2+z^2}} \quad \therefore$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_C \frac{dq}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\int_C dq$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+z^2}} .$$

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+z^2}}}$$