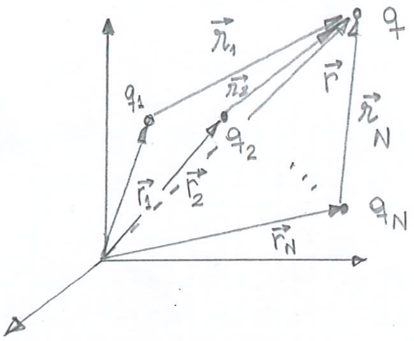
CAP 2: O CAMPO ELÉTRICO

1) CONCEITOS BÁSICOS

CONSIDERE UMA CARGA ELÉTRICA q E UM CONJUNTO DE CARGAS $q_1, \dots, q_N$ COMO MOSTRA O DIAGRAMA ABAIXO:



ASSUMINDO QUE AS CARGAS ESTEJAM EM REPOUSO, PODEMOS CALCULAR A FORÇA ELÉTRICA EXERCIDA POR CADA CARGA q_i, $i = 1, \dots, N$ SOBRE q E CALCULAR A FORÇA ELÉTRICA RESULTANTE SOBRE q. O RESULTADO É:

$$\vec{F}_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q}{|\vec{\imath}_1|^2}\hat{\imath}_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2 q}{|\vec{\imath}_2|^2}\hat{\imath}_2 + \dots + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_N q}{|\vec{\imath}_N|^2}\hat{\imath}_N$$

PODEMOS ESCREVER A EXPRESSÃO ACIMA COMO,

$$\vec{F}_R = q\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{|\vec{\imath}_1|^2}\hat{\imath}_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{|\vec{\imath}_2|^2}\hat{\imath}_2 + \dots + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_N}{|\vec{\imath}_N|^2}\hat{\imath}_N\right)$$

DEFINIMOS O CAMPO ELÉTRICO $\vec{E}_1$ PRODUZIDO PELA CARGA q_1 EM $\vec{r}$ POR,

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{|\vec{\imath}_1|}\hat{\imath}_1$$

OU

$$\boxed{\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}}$$

LOGO, A FORÇA RESULTANTE SOBRE q PODE SER EXPRESSA COMO,

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{F}_R &= q\left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N\right)\\ &\equiv q\,\vec{E}_R\end{aligned}}$$

NOTA: NO SI, A UNIDADE DE MEDIDA DE CAMPO ELÉTRICO É N/C.

NOTE QUE, DADA UMA DISTRIBUIÇÃO DE CARGAS, PODEMOS CALCULAR O CAMPO ELÉTRICO EM QUALQUER PONTO DO ESPAÇO. DESTA FORMA, PARA CADA VETOR POSIÇÃO ESCOLHIDO, PODEMOS ASSOCIAR UM VETOR CAMPO ELÉTRICO. LOGO, TENDO O CAMPO ELÉTRICO DE UMA DISTRIBUIÇÃO DE CARGAS CALCULADO PODEMOS OBTER O VALOR DA FORÇA ELÉTRICA RESULTANTE SOBRE UMA CARGA DE PROVA COLADA EM UMA POSIÇÃO $\vec{r} = (x, y, z)$.

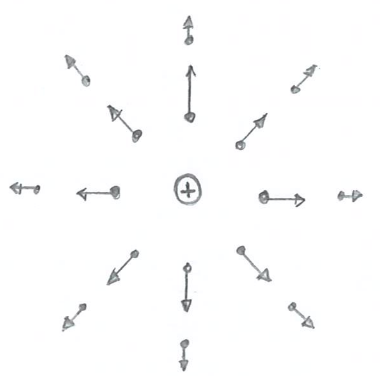
O CAMPO ELÉTRICO PRODUZIDO POR UMA CARGA PUNTIFORME q É DADO POR

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\vec{r}|^2}\hat{r},$$

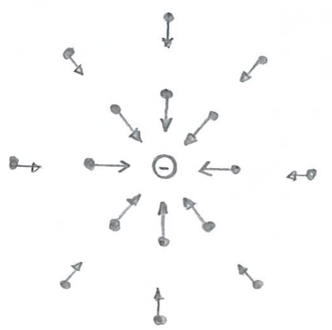
ONDE $|\vec{r}|$ MEDE A DISTÂNCIA ENTRE A CARGA E O PONTO NO ESPAÇO ONDE SE DESEJA CALCULAR O CAMPO ELÉTRICO.

PODEMOS REPRESENTAR O CAMPO ELÉTRICO PRODUZIDO POR UMA CARGA PUNTIFORME, ASSOCIANDO A CADA PONTO DO ESPAÇO, UM VETOR. DE ACORDO COM NOSSAS CONVENÇÕES O CAMPO ELÉTRICO GERADO POR UMA CARGA POSITIVA, TERÁ SENTIDO DE AFASTAMENTO DA CARGA, JÁ QUE O VETOR $\vec{r}$ PARTE DA CARGA FONTE PARA A CARGA DE PROVA.

LOGO,



JÁ PARA CARGA NEGATIVA, O VETOR CAMPO ELÉTRICO APONTA PARA A CARGA.



OBSERVAÇÕES:

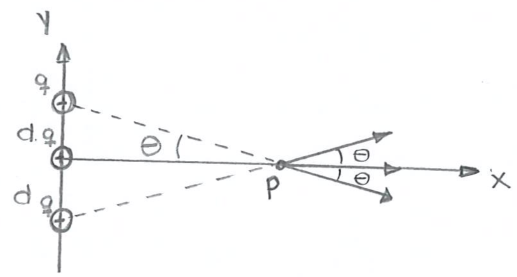
1) A DIREÇÃO DO CAMPO ELÉTRICO PARA CARGAS PUNTIFORMES É SEMPRE RADIAL POR RAZÕES DE SIMETRIA.

2) COMO A INTENSIDADE DO CAMPO É PROPORCIONAL AO INVERSO DO QUADRADO DA DISTÂNCIA, O VETOR CAMPO ELÉTRICO É REPRESENTADO POR "FLECHAS" MENORES PARA PONTOS MAIS DISTANTES DA CARGA FONTE.

EXEMPLO (RANDALL):

TRÊS CARGAS PUNTIFORMES IGUAIS A $q\,(>0)$ ESTÃO LOCALIZADAS SOBRE UM EIXO VERTICAL, EM $y=0$ E $y=\pm d$. DETERMINE O CAMPO ELÉTRICO CRIADO EM UM PONTO DO EIXO X.

SOLUÇÃO:



POR SIMETRIA, AS COMPONENTES VERTICAIS DO CAMPO ELÉTRICO PRODUZIDO POR CADA CARGA, SE EQUILIBRAM. PORTANTO, O CAMPO RESULTANTE É PARALELO AO EIXO X. TOMANDO $OP = X$, TEMOS

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{d^2+x^2}}$$

LOGO,

$$|\vec{E}_R| = E_q\cos\theta + E_q\cos\theta + E_q'$$

E

$$E_q = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{(d^2+x^2)}$$

$$E_q' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{x^2}$$

PORTANTO,

$$|\vec{E}_R| = 2 \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(d^2+x^2)} \frac{x}{\sqrt{d^2+x^2}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2}$$

$$\Rightarrow |\vec{E}_R| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2x}{(d^2+x^2)^{3/2}} + \frac{1}{x^2} \right]$$

O VETOR CAMPO ELÉTRICO É,

$$\vec{E}_R = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2x}{(d^2+x^2)^{3/2}} + \frac{1}{x^2} \right] \hat{x}$$

SE $x >> d$, ENTÃO

$$\vec{E}_R = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2} \hat{x}$$

$\longrightarrow$ CAMPO PRODUZIDO POR UMA CARGA PUNTIFORME DE INTENSIDADE $3q$

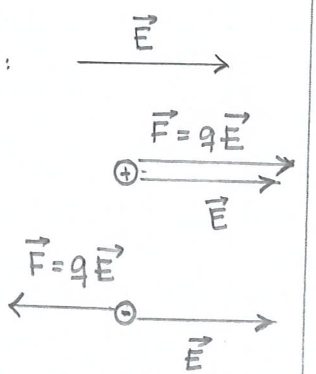
NOTA:

PELA RELAÇÃO ENTRE CAMPO E FORÇA ELÉTRICA, OU SEJA,

$$\vec{F} = q\vec{E},$$

OBSERVAMOS QUE PARA UMA CARGA DE PROVA POSITIVA, CAMPO E FORÇA TÊM O MESMO SENTIDO. JÁ PARA UMA CARGA DE PROVA NEGATIVA, CAMPO E FORÇA TÊM SENTIDOS OPOSTOS COMO ILUSTRADO NA FIGURA A SEGUIR:

- CAMPO ELÉTRICO:
- CARGA DE PROVA POSITIVA:
- CARGA DE PROVA NEGATIVA:

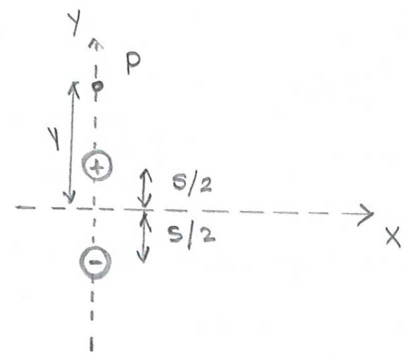


2) CAMPO ELÉTRICO DE UM DIPOLO:

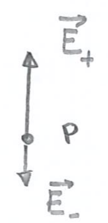
DADAS DUAS CARGAS DE MESMO MÓDULO, MAS SINAIS CONTRÁRIOS E SEPARADAS POR UMA DISTÂNCIA CONSIDERADA PEQUENA EM RELAÇÃO À OUTRAS ESCALAS DO SISTEMA DE INTERESSE, DIZEMOS QUE ESSAS CARGAS FORMAM UM DIPOLO ELÉTRICO.

PODEMOS MODELAR UM DIPOLO ELÉTRICO POR DUAS CARGAS PUNTIFORMES SEPARADAS POR UMA PEQUENA DISTÂNCIA S. DESTA FORMA, PODEMOS CALCULAR O CAMPO ELÉTRICO PRODUZIDO POR UM DIPOLO FACILMENTE.

INICIALMENTE, CALCULEMOS O CAMPO ELÉTRICO EM UM PONTO PERTENCENTE AO EIXO QUE UNE AS CARGAS:



NO PONTO P, OS CAMPOS ELÉTRICOS PRODUZIDOS POR CADA CARGA ESTÃO REPRESENTADOS ABAIXO:



MAS,

$$\vec{E}_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(y-s/2)^2} \hat{y}$$

$$\vec{E}_- = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(y+s/2)^2} \hat{y}$$

O CAMPO ELÉTRICO RESULTANTE É

$$\vec{E}_R = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

CUJO MÓDULO É :

$$|\vec{E}_R| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(y-s/2)^2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{q}{(y+s/2)^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{(y-s/2)^2} - \frac{1}{(y+s/2)^2}\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{(y+s/2)^2-(y-s/2)^2}{(y-s/2)^2(y+s/2)^2}\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\cancel{y^2}+2ys/2+\cancel{s^2/4}-\cancel{y^2}+2sy/2-\cancel{s^2/4}}{(y-s/2)^2(y+s/2)^2}\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{2ys}{(y-s/2)^2(y+s/2)^2}$$

$$\boxed{|\vec{E}_R| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{2ys}{(y-s/2)^2(y+s/2)^2}}$$

SE ASSUMIRMOS QUE O PONTO P ENCONTRA-SE SUFICIENTEMENTE DISTANTE DO DIPOLO, TEMOS QUE $y >> s$. PORTANTO, O CAMPO ELÉTRICO RESULTANTE É REDUZIDO A

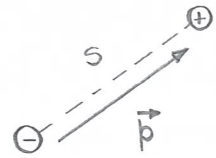
$$\boxed{|\vec{E}_R| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{2s}{y^3}}$$

DEF: A QUANTIDADE $\vec{p} = qs\hat{s}$, ONDE $\hat{s}$ É UM VETOR UNITÁRIO QUE APONTA DA CARGA NEGATIVA PARA A CARGA POSITIVA, É CHAMADA DE MOMENTO DE DIPOLO.

OBSERVAÇÃO: 1) NO EXEMPLO ANTERIOR, $\hat{s} = \hat{y}$.

2) A DIREÇÃO E O SENTIDO DE $\vec{p}$ INDICAM A ORIENTAÇÃO DO DIPOLO.

EX:



PODEMOS EXPRESSAR O MOMENTO DE DIPOLO PARA ESCREVER O CAMPO ELÉTRICO COMO

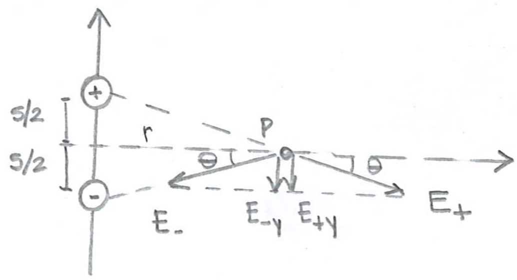
$$\vec{E}_{DIPOLO} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\vec{p}}{r^3}$$

MEDIDA A PARTIR DO CENTRO DO DIPOLO.

QUANDO CALCULADO SOBRE O EIXO DO DIPOLO.

EXERCÍCIO: CALCULE O CAMPO ELÉTRICO AO LONGO DO EIXO PERPENDICULAR O EIXO DO DIPOLO E QUE COINCIDE COM SUA MEDIATRIZ:

SOLUÇÃO:



$$|\vec{E}_R| = |\vec{E}_{-y}| + |\vec{E}_{+y}| = |\vec{E}_-|\,\text{SEN}\theta +$$
$$+ |\vec{E}_+|\,\text{SEN}\theta$$

$$\text{SEN}\theta = \frac{s/2}{\sqrt{r^2+(s^2/4)}} \approx \frac{s/2}{r}$$

$$|\vec{E}_+| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{(r^2+s^2/4)} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

$$\Longrightarrow |\vec{E}_R| = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{s/2}{r}\right)\times 2$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qs}{r^3}$$

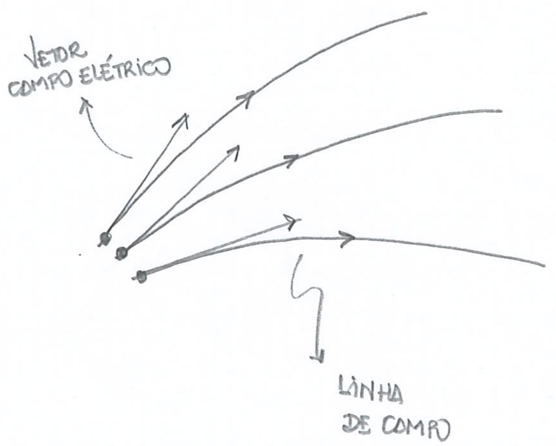
$$\boxed{\vec{E}_R = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}}{r^3}}$$

3) VISUALIZAÇÃO DO CAMPO ELÉTRICO: LINHAS DE CAMPO

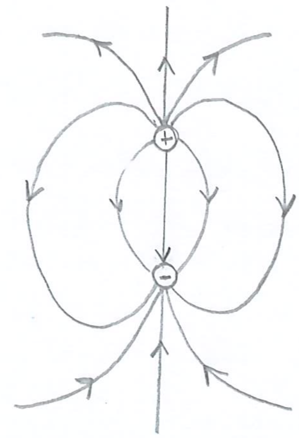
O CAMPO ELÉTRICO É UM CAMPO VETORIAL QUE, A CADA POSIÇÃO $\vec{r}$ ASSOCIA UM VETOR $\vec{E}(\vec{r})$. PORTANTO, UMA FORMA BASTANTE DIRETA DE REPRESENTAR UMA VISUALIZAÇÃO DO CAMPO ELÉTRICO É DESENHANDO O VETOR CAMPO EM CADA PONTO $\vec{r} = (x, y, z)$.

UMA OUTRA FORMA DE REPRESENTAR O CAMPO ELÉTRICO É ATRAVÉS DAS CHAMADAS LINHAS DE CAMPO. ESSAS LINHAS SÃO TAIS QUE PARA CADA PONTO, O VETOR CAMPO ELÉTRICO É TANGENTE À CURVA

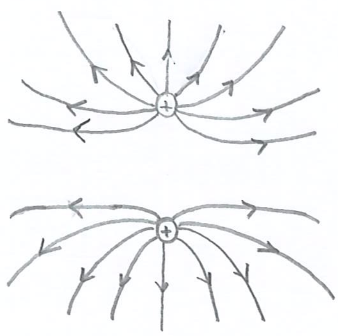
ALÉM DE ESSA PROPRIEDADE, AS LINHAS DE CAMPO, QUANTO MAIS PRÓXIMAS, REPRESENTAM CAMPOS DE INTENSIDADE MAIOR. ELAS TAMBÉM NÃO SE CRUZAM (CASO CONTRÁRIO, O CAMPO ELÉTRICO NESTE PONTO SERIA MAL DEFINIDO). FINALMENTE, AS LINHAS DE CAMPO PARTEM DE CARGAS POSITIVAS E CHEGAM EM CARGAS NEGATIVAS. VEJA O EXEMPLO ABAIXO.



EX: NO CASO DE UM DIPOLO ELÉTRICO, AS LINHAS DE CAMPO SÃO:



EX: DUAS CARGAS IGUAIS:



4) DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS DE CARGA:

PARA UMA DISTRIBUIÇÃO DE CARGAS PUNTIFORMES, O CAMPO ELÉTRICO RESULTANTE É DADO POR

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i}$$

ENTRETANTO, NA PRÁTICA, ESTAMOS MUITAS VEZES INTERESSADOS NO CÁLCULO DO CAMPO ELÉTRICO PRODUZIDO POR UMA DISTRIBUIÇÃO DE CARGAS QUE PARA TODOS OS EFEITOS SE COMPORTA COMO UMA DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA. PORTANTO, PODEMOS TOMAR UM PEQUENO ELEMENTO DE CARGA dq DESTA DISTRIBUIÇÃO, CALCULAR SUA CONTRIBUIÇÃO PARA O CAMPO ELÉTRICO RESULTANTE E SOMAR TODAS AS CONTRIBUIÇÕES. DA DISTRIBUI-

ÇÃO ATRAVÉS DO PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO.

PARA SERMOS CONCRETOS, VAMOS ASSUMIR INICIALMENTE QUE AS CARGAS ESTEJAM DISTRIBUÍDAS AO LONGO DE UMA ESTRUTURA UNIDIMENSIONAL. PORTANTO, UM ELEMENTO DE CARGA dq PODE SER ESCRITO COMO

$$dq = \lambda \, d\ell \, ,$$

ONDE λ É CONHECIDA COMO DENSIDADE LINEAR DE CARGAS (CARGA POR UNIDADE DE COMPRIMENTO). LOGO, SOMAR SOBRE TODOS OS ELEMENTOS DE CARGA, I.E.,

$$\sum_i dq_i = \sum_i \lambda_i \, d\ell_i$$

NO LIMITE EM QUE $d\ell \to 0$, É EQUIVALENTE A REALIZAR A SEGUINTE INTEGRAL,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{\mathscr{r}_i^2} \hat{\mathscr{r}}_i$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda}{\mathscr{r}^2} \hat{\mathscr{r}} \, d\ell}$$

NO CASO DE UMA DISTRIBUIÇÃO HOMOGÊNEA, $\lambda = Q/L$, ONDE Q É A CARGA TOTAL DISTRIBUÍDA SOBRE O FIO E L É O COMPRIMENTO DO FIO.

A ANÁLISE É GENERALIZADA FACILMENTE PARA UMA DISTRIBUIÇÃO SUPERFICIAL E VOLUMÉTRICA DE CARGAS:

- NO CASO DE UMA DISTRIBUIÇÃO SUPERFICIAL, DEFINIMOS UMA DENSIDADE SUPERFICIAL DE CARGAS η POR

$$dq = \eta \, d\sigma ,$$

ONDE $d\sigma$ É UM ELEMENTO DE ÁREA. PORTANTO, O CAMPO ELÉTRICO RESULTANTE É

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\eta}{\mathscr{r}^2} \hat{\mathscr{r}} \, d\sigma}$$

- ANALOGAMENTE, PARA UMA DISTRIBUIÇÃO VOLUMÉTRICA, DEFINIMOS UMA DENSIDADE VOLUMÉTRICA DE CARGAS ρ POR

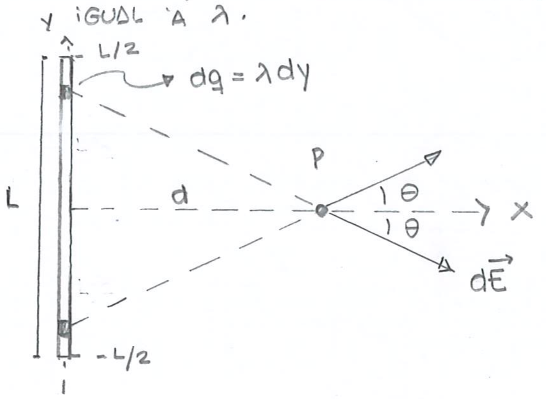
$$dq = \rho \, dV ,$$

ONDE dV É UM ELEMENTO DE VOLUME. A EXPRESSÃO PARA O CAMPO ELÉTRICO RESULTANTE DEVIDO À ESSA DISTRIBUIÇÃO DE CARGAS É

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{\mathscr{r}^2} \hat{\mathscr{r}} \, dV}$$

<u>APLICAÇÕES</u>: CAMPO ELÉTRICO DE UMA LINHA DE CARGA.

DISTRIBUIÇÃO DE CARGAS É HOMOGÊNEA. DENSIDADE IGUAL À λ.



POR SIMETRIA, TODAS AS CONTRIBUIÇÕES P/ O CAMPO RESULTANTE NA DIREÇÃO VERTICAL SE CANCELAM. PORTANTO, O CAMPO ELÉTRICO RESULTANTE É:

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\lambda}{(\sqrt{d^2+y^2})^2} \cos\theta \, dy \; \hat{x}$$

$$\cos\theta = \frac{d}{\sqrt{d^2+y^2}}$$

LOGO,

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\lambda d}{(d^2+y^2)^{3/2}} dy \, \hat{x} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda d \left(\int_{-L/2}^{L/2} \frac{dy}{(d^2+y^2)^{3/2}} \right) \hat{x}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda d \left(\frac{y}{d^2\sqrt{d^2+y^2}} \Bigg|_{-L/2}^{L/2} \right) \hat{x}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda \cancel{d} \left[\frac{L/2}{d^{\cancel{2}}\sqrt{d^2+(L/2)^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{L/2}{d^{\cancel{2}}\sqrt{d^2+(\frac{L}{2})^2}} \right] \hat{x}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda L}{d\sqrt{d^2+(\frac{L}{2})^2}} \hat{x}$$

CONSIDERANDO Q A CARGA TOTAL NO FIO, ENTÃO $\lambda = Q/L$.

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{d\sqrt{d^2+(\frac{L}{2})^2}} \hat{x}$$

O MÓDULO DO CAMPO ELÉTRICO É:

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q|}{d\sqrt{d^2+(\frac{L}{2})^2}} .$$

NO CASO EM QUE $d >> L$:

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q|}{d^2}$$

INTENSIDADE DE
CAMPO ELÉTRICO PRODUZIDO POR UMA CARGA PUNTIFORME Q.

NOTA:

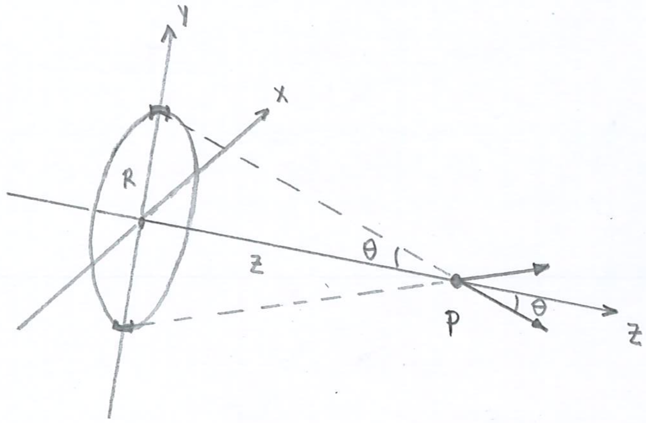
PODEMOS TOMAR O LIMITE EM QUE O COMPRIMENTO DO FIO É INFINITAMENTE LONGO (ENQUANTO A DENSIDADE DE CARGA É CONSTANTE). PORTANTO, $L >> d$:

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{d\,L/2} \hat{x}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{d} \hat{x}$$

$$\boxed{\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{d} \hat{x}}$$

APLICAÇÕES: CAMPO ELÉTRICO CRIADO POR UM ANEL DE CARGA



POR SIMETRIA, SOMENTE AS COMPONENTES NA DIREÇÃO Z CONTRIBUEM PARA O CAMPO ELÉTRICO RESULTANTE (AS OUTRAS COMPONENTES SE CANCELAM). A CONTRIBUIÇÃO DE UM ELEMENTO DE CARGA É

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{(R^2+z^2)} \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}} \int dq =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}} \int \lambda \, d\ell =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}} \lambda . R \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2+z^2)^{3/2}} \underbrace{\lambda R \cdot 2\pi}_{Q}$$

LOGO,

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zQ}{(R^2+z^2)^{3/2}} \hat{z}}$$

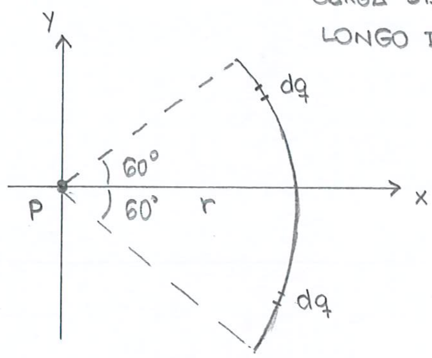
PARA $z >> R$:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2} \hat{z}$$ (CARGA PONTUAL DE CARGA Q)

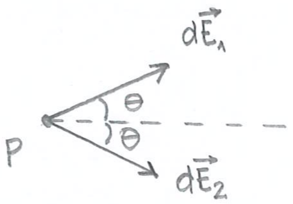
APLICAÇÕES : CAMPO ELÉTRICO PRODUZIDO POR UM FIO CIRCULAR. (NO PONTO P).

CONSIDERE A SEGUINTE CONFIGURAÇÃO:

CARGA DISTRIBUÍDA AO LONGO DO FIO - Q.



OS ELEMENTOS DE CARGA DESENHADOS PRODUZEM OS SEGUINTES CAMPOS ELÉTRICOS.



COMPONENTES VERTICAIS SE CANCELAM. A COMPONENTE HORIZONTAL É :

$$|d\vec{E}_x| = |d\vec{E}| \cos\theta =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|dq|}{r^2} \cos\theta =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\lambda| d\ell}{r^2} \cos\theta$$

$$d\ell = r\, d\theta$$

$$\Rightarrow |d\vec{E}_x| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\lambda|}{r^{\cancel{2}}} \cos\theta\, \cancel{r}\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\lambda|}{r} \cos\theta\, d\theta$$

PORTANTO,

$$|\vec{E}_x| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\lambda|}{r} \int_{-60^\circ}^{60^\circ} \cos\theta\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\lambda|}{r} \left(\operatorname{sen}\theta \Big|_{-60^\circ}^{60^\circ} \right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|\lambda|}{r} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}|\lambda|}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \therefore \quad |\lambda| = \frac{Q}{\left(\frac{2\pi r}{3}\right)} = \frac{3Q}{2\pi r}$$

$$|\vec{E}_x| = \frac{\sqrt{3} \cdot 3Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2\pi \cdot r^2} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{8\pi^2\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

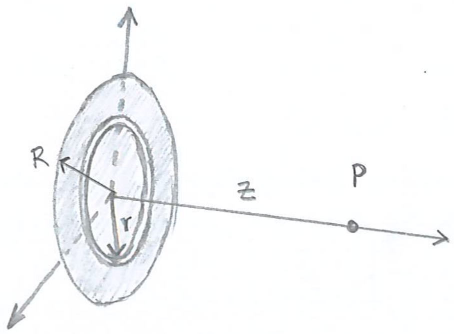
$$\boxed{\vec{E}_x = \frac{3\sqrt{3}}{8\pi^2\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{x}}$$

APLICAÇÕES : UM DISCO DE CARGA :

CONSIDEREMOS UM DISCO DE RAIO R UNIFORMEMENTE CARREGADO COM CARGA TOTAL Q. SUA DENSIDADE SUPERFICIAL DE CARGA η É DADA POR

$$\eta = \frac{Q}{\pi R^2},$$

ONDE $A = \pi R^2$ É A ÁREA DO DISCO. QUEREMOS CALCULAR O CAMPO ELÉTRICO PRODUZIDO PELO DISCO EM UM PONTO P PERTENCENTE AO EIXO z QUE PASSA PELO CENTRO DO DISCO SENDO ORTOGONAL A ELE COMO MOSTRA A FIGURA.



A ESTRATÉGIA É CONSIDERAR QUE O DISCO É FORMADO POR UM CONJUNTO DE ANÉIS CARREGADOS E O CAMPO RESULTANTE SERÁ A SUPERPOSIÇÃO DOS CAMPOS GERADOS POR CADA ANEL. O CAMPO GERADO POR UM ANEL É:

$$|d\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{z\,dQ}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

O CAMPO TOTAL SERÁ:

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\, z \int \frac{\eta}{(r^2+z^2)^{3/2}}\, d\sigma$$

$$d\sigma = r\,dr\,d\theta$$

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\, z \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dr\, \frac{\eta r}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{z\, 2\pi}{4\pi\epsilon_0}\,\eta \int_0^R dr\, \frac{r}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

$$u = r^2+z^2 \;\therefore\; du = 2r\,dr \;\therefore\; r\,dr = \frac{1}{2}du$$

$$\frac{1}{2}\int du\, \frac{1}{u^{3/2}} = \frac{1}{2}\frac{u^{-1/2}}{-1/2} = -u^{-1/2} =$$

$$= -\frac{1}{(r^2+z^2)^{1/2}}$$

$$\int_0^R dr\, \frac{r}{(r^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(R^2+z^2)^{1/2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2}}$$

LOGO,

$$|\vec{E}| = \frac{1}{{}_2\cancel{4\pi}\epsilon_0}\,\cancel{2\pi}\, z\eta \left[\frac{1}{z} - \frac{1}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right]$$

$$= \frac{1}{2\epsilon_0}\eta\left[1 - \frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right]$$

$$\boxed{|\vec{E}| = \frac{\eta}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{z}{(R^2+z^2)^{1/2}}\right]}$$

OBS: SE QUISERMOS INVESTIGAR O LIMITE $z >> R$, VEMOS QUE O RESULTADO É $|\vec{E}| = 0$. ISTO ESTÁ CORRETO, OU SEJA, PARA DISTÂNCIAS SUFICIENTEMENTE GRANDES, O CAMPO ELÉTRICO SERÁ DESPREZÍVEL. ENTRETANTO, PODEMOS NOS PERGUNTAR SOBRE O QUE ACONTECE COM $z >> R$, MAS AINDA A UMA DISTÂNCIA FINITA DO DISCO; NESTE CASO,

$$(R^2+z^2)^{-1/2} = z^{-1}\left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2} =$$

$$\approx z^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}\right)$$

PORTANTO,

$$|\vec{E}| = \frac{\eta}{2\epsilon_0}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\eta}{2\epsilon_0}\frac{R^2}{z^2} = \frac{Q/\pi\cancel{R^2}}{4\epsilon_0}\frac{\cancel{R^2}}{z^2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{z^2}$$

→ CAMPO ELÉTRICO DE UMA CARGA PUNTIFORME.

APLICAÇÕES: PLANO DE CARGA INFINITO

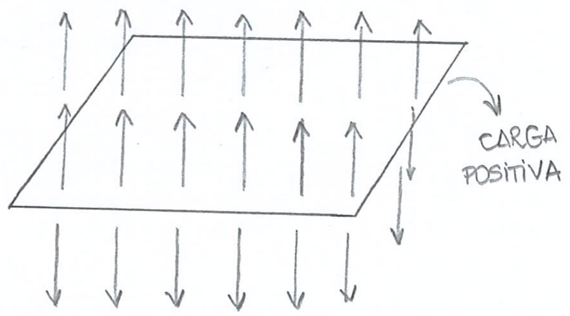
NESTE CASO, PODEMOS CALCULAR O CAMPO A PARTIR DA EXPRESSÃO DO CAMPO PRODUZIDO POR UM DISCO NO LIMITE EM QUE $R \to \infty$.

ISTO IMPLICA

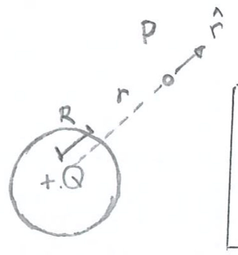
$$\boxed{|\vec{E}| = \frac{\eta}{2\epsilon_0} = \text{CONSTANTE}}$$

ESTE RESULTADO APRESENTA A SEGUINTE PECULIARIDADE: A INTENSIDADE DE CAMPO É A MESMA EM TODOS OS PONTOS DO ESPAÇO. ISTO É, INTUITIVAMENTE, DEVIDO AO FATO DE QUE A DISTRIBUIÇÃO DE CARGA É INFINITAMENTE EXTENSA E, PORTANTO, A INTENSIDADE DE CAMPO NÃO DIMINUI COM A DISTÂNCIA.

A REPRESENTAÇÃO VISUAL DO CAMPO ELÉTRICO PRODUZIDO POR UM PLANO INFINITO É:



OBS: UMA OUTRA DISTRIBUIÇÃO DE CARGA DE GRANDE INTERESSE, É UMA DISTRIBUIÇÃO ESFÉRICA (SEJA AO LONGO DE UMA CASCA ESFÉRICA OU DE SEU VOLUME). NESTES CASOS, SE UMA CARGA Q É DISTRIBUÍDA UNIFORMEMENTE PELA ESFERA, ENTÃO O CAMPO PRODUZIDO EM UM PONTO P COMO INDICADO NA FIGURA É,



$$\boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{r} \quad \text{PARA } r \geq R}$$

(P/ $r < R$, O RESULTADO É DIFERENTE)

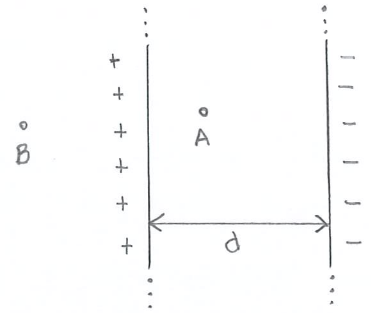
ESTE RESULTADO INDICA QUE O CAMPO ELÉTRICO PRODUZIDO POR UMA DISTRIBUIÇÃO ESFÉRICA DE CARGAS É EQUIVALENTE AO CAMPO PRODUZIDO POR UMA CARGA PUNTIFORME COM CARGA IGUAL A CARGA TOTAL DA ESFERA SITUADA EM SEU CENTRO.

A DERIVAÇÃO DESTA EXPRESSÃO PODE SER FEITA DE MANEIRA COMPLETAMENTE ANÁLOGA ÀS DISTRIBUIÇÕES DE CARGA ANTERIORES. ENTRETANTO, NO PRÓXIMO CAPÍTULO, UTILIZAREMOS MÉTODOS MAIS EFICAZES QUE NOS PERMITEM DERIVAR ESTE RESULTADO DE FORMA BEM SIMPLES.

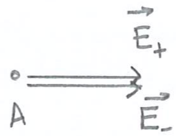
5) CAPACITOR DE PLACAS PARALELAS

CONSIDEREMOS DUAS PLACAS INFINITAS (POR SIMPLICIDADE) COM CARGAS +Q E −Q DISTRIBUÍDAS UNIFORMENTE EM CADA UMA DELAS SEPARADAMENTE. SUPONHAMOS QUE ESSAS PLACAS SÃO COLOCADAS EM POSIÇÃO PARALELA SEPARADAS POR UMA DISTÂNCIA d. ESTA DISTRIBUIÇÃO É CONHECIDA COMO CAPACITOR DE PLACAS PARALELAS.

PODEMOS CALCULAR, UTILIZANDO OS RESULTADOS ANTERIORES, O CAMPO ELÉTRICO PRODUZIDO POR UM CAPACITOR.

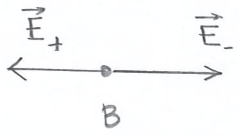


O campo elétrico produzido no ponto A é dado por



$$|\vec{E}_R| = |\vec{E}_+| + |\vec{E}_-| = \frac{\eta}{2\epsilon_0} + \frac{\eta}{2\epsilon_0} = \frac{\eta}{\epsilon_0}$$

O campo elétrico produzido no ponto B é:



$$|\vec{E}_R| = |\vec{E}_+| - |\vec{E}_-| = \frac{\eta}{2\epsilon_0} - \frac{\eta}{2\epsilon_0}$$

De maneira inteiramente análoga, o campo elétrico no ponto C se anula. Isto é devido ao fato de que cada placa produz um campo cuja intensidade independe da distância.

Ainda pelo mesmo motivo, o campo elétrico no interior do capacitor tem intensidade constante e sempre aponta da placa positiva para a placa negativa (com direção perpendicular às placas).

<u>OBS:</u> Um campo elétrico que tem mesma intensidade, direção e sentido em todos os pontos do espaço é chamado de campo elétrico uniforme

6) <u>Movimento de uma partícula carregada em um campo elétrico:</u>

Até o presente momento, nosso estudo de campos elétricos foi dominado por cálculos do vetor campo elétrico resultante gerado por uma distribuição de cargas.

Entretanto, nossa intenção inicial ao definir o vetor campo elétrico era obter um meio de calcular a força elétrica que atua em uma carga situada no ponto onde o campo foi calculado a partir da seguinte expressão.

$$\vec{F} = q\vec{E}\,.$$

Se a força elétrica é a única força exercida sobre a carga elétrica, então temos que,

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}}$$

Ou seja, a aceleração $\vec{a}$ adquirida pela partícula carregada devida a atuação da força elétrica é dada por

$$\boxed{\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}}$$

- <u>Campo Uniforme:</u>

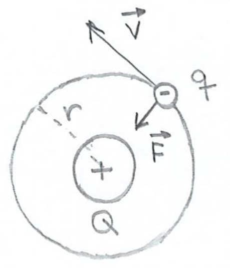
Como um campo elétrico uniforme é um campo vetorial constante, temos que

$$\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E} = \text{vetor constante}.$$

- CAMPO NÃO-UNIFORME:

TIPICAMENTE, ESTUDAR O MOVIMENTO DE CARGAS ELÉTRICAS EM CAMPOS NÃO-UNIFORMES É UMA TAREFA BASTANTE COMPLEXA. PORTANTO, PARA ALCANÇARMOS RESULTADOS CONCRETOS, PRECISAMOS RESTRINGIR A FORMA DO CAMPO NÃO-UNIFORME. PARA CAMPOS MAIS COMPLEXOS, TÉCNICAS MAIS SOFISTICADAS SÃO NECESSÁRIAS.

ENTRETANTO, PODEMOS CONSIDERAR UM CAMPO NÃO-UNIFORME BASTANTE SIMPLES: O CAMPO PRODUZIDO POR UMA ESFERA CARREGADA. ALÉM DE ISSO, CONSIDERAMOS A TRAJETÓRIA CIRCULAR DE UMA CARGA DE PROVA COMO MOSTRA A FIGURA ABAIXO.



FORÇA RADIAL:

$$F = \frac{m|\vec v|^2}{r} = |q||\vec E|$$

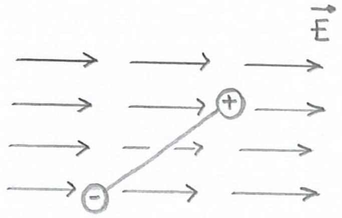
CONDIÇÃO PARA TRAJETÓRIA CIRCULAR:

$$\boxed{|q||\vec E| = \frac{m|\vec v|^2}{r}}$$

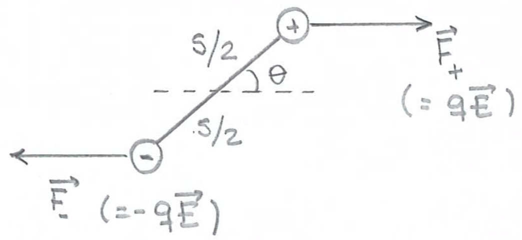
7) MOVIMENTO DE UM DIPOLO EM UM CAMPO ELÉTRICO

- DIPOLOS EM CAMPOS UNIFORMES:

CONSIDERE A SITUAÇÃO ABAIXO ONDE UM DIPOLO EM UM CAMPO ELÉTRICO UNIFORME:



AS CARGAS QUE COMPÕE O DIPOLO, QUANDO IMERSAS EM UM CAMPO UNIFORME SOFREM A AÇÃO DAS SEGUINTES FORÇAS.



COMO AS CARGAS TÊM A MESMA INTENSIDADE E O CAMPO É UNIFORME, ENTÃO

$$\vec F_+ + \vec F_- = 0.$$

$\Longrightarrow$ A FORÇA RESULTANTE SOBRE O DIPOLO É NULA.

ENTRETANTO, DEVIDO A EXTENSÃO DO DIPOLO, ESSAS FORÇAS PRODUZEM UM TORQUE (EM RELAÇÃO, POR EXEMPLO, AO CENTRO DO DIPOLO). PARA CONFIGURAÇÃO DESENHADA, ESTE TORQUE TENDE A GIRAR O DIPOLO NO SENTIDO HORÁRIO. O TORQUE PRODUZIDO PELA FORÇA $\vec F_+$ É:

$$|\vec\tau_+| = |\vec F_+|\frac{s}{2}\,\text{sen}\,\theta,$$

ENQUANTO O TORQUE PRODUZIDO POR $\vec F_-$ É:

$$|\vec\tau_-| = |\vec F_-|\frac{s}{2}\,\text{sen}\,\theta.$$

OS TORQUES SÃO COLINEARES E APONTAM NO MESMO SENTIDO. O MÓDULO RESULTANTE É,

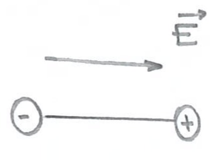
$$|\vec\tau_R| = |\vec\tau_+| + |\vec\tau_-| = |\vec F_+|\frac{s}{2}\,\text{sen}\,\theta + |\vec F_-|\frac{s}{2}\,\text{sen}\,\theta$$

$$= q|\vec E|\frac{s}{2}\,\text{sen}\,\theta + q|\vec E|\frac{s}{2}\,\text{sen}\,\theta$$

$$= qs|\vec E|\,\text{sen}\,\theta = |\vec p||\vec E|\,\text{sen}\,\theta$$

$$\boxed{|\vec\tau_R| = |\vec p||\vec E|\,\text{sen}\,\theta}$$

O TORQUE PRODUZ UMA ROTAÇÃO AO DIPOLO ATÉ QUE ESTE SE ALINHE AO CAMPO ELÉTRICO:

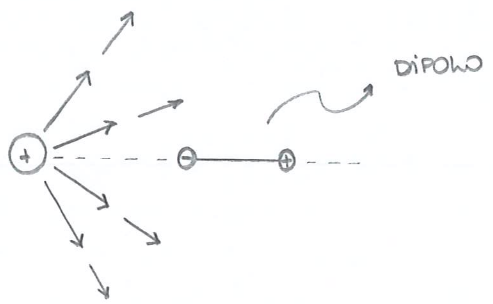


NESTA POSIÇÃO, O DIPOLO ENTRA EM EQUILÍBRIO. O VETOR TORQUE RESULTANTE PODE SER ESCRITO COMO

$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}}$$

- DIPOLOS EM CAMPOS NÃO-UNIFORMES:

CONSIDEREMOS UM CAMPO NÃO-UNIFORME BASTANTE SIMPLES: O CAMPO GERADO POR UMA CARGA PUNTIFORME:



NESTE CASO, A TENDÊNCIA DO DIPOLO É SE ALINHAR AO CAMPO: NESTE CASO, A CARGA NEGATIVA É A CARGA QUE É ATRAÍDA PARA A CARGA FONTE. NOTE QUE, NESTE CASO, A FORÇA ELÉTRICA QUE ATUA SOBRE A CARGA NEGATIVA TEM INTENSIDADE MAIOR QUE A FORÇA ELÉTRICA QUE ATUA SOBRE A CARGA POSITIVA. PORTANTO, HÁ UMA FORÇA RESULTANTE NÃO-NULA SOBRE O DIPOLO.