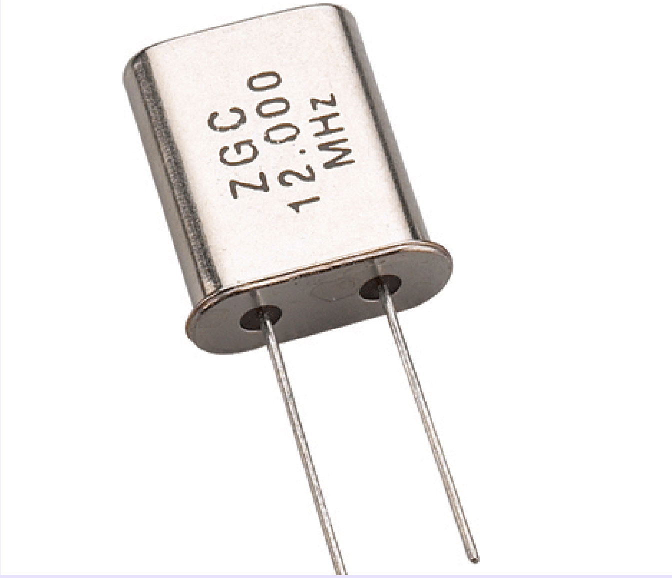
Oscilações



Prof. Fábio de Oliveira Borges

Curso de Física II

Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense

Niterói, Rio de Janeiro, Brasil

https://cursos.if.uff.br/!fisica2-0217/doku.php

INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense

Oscilações LC

Vimos que:

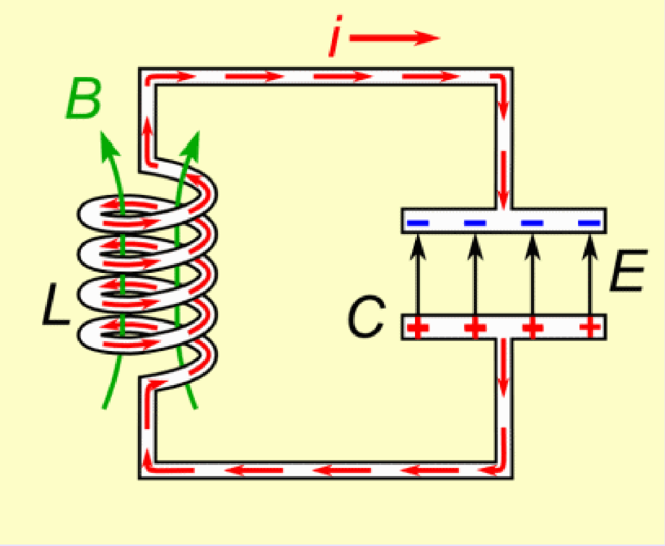
Circuitos RC e RL:

- q(t), i(t) e V(t): têm comportamento exponencial

Veremos agora que:

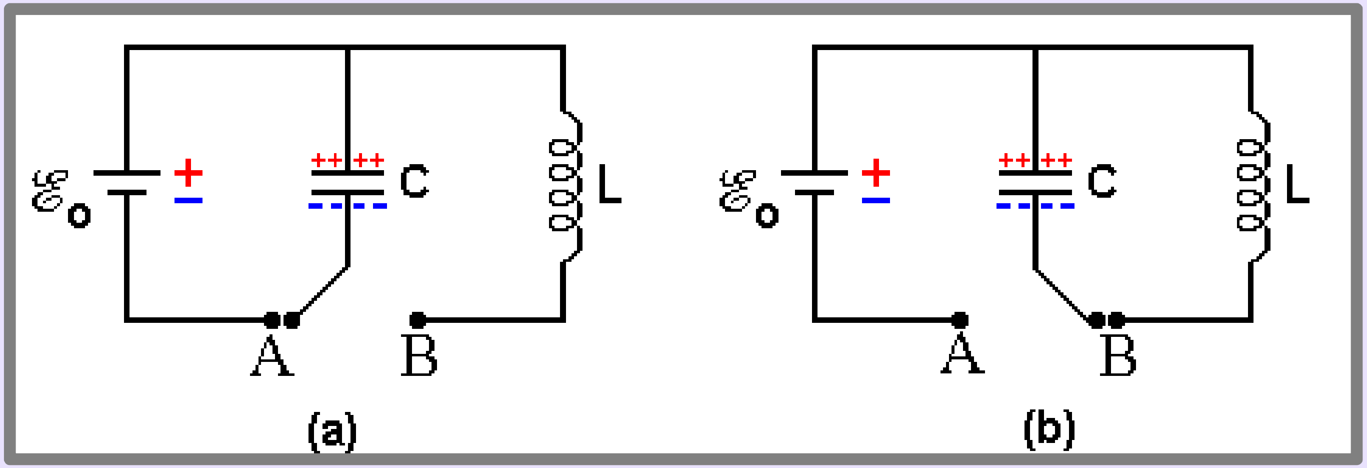
Circuito LC:

- q(t), i(t) e V(t): comportamento senoidal
- Oscilações
  - campo elétrico do capacitor
  - campo magnético do indutor



Oscilações eletromagnéticas

Oscilações LC



1) Chave ligada em A:

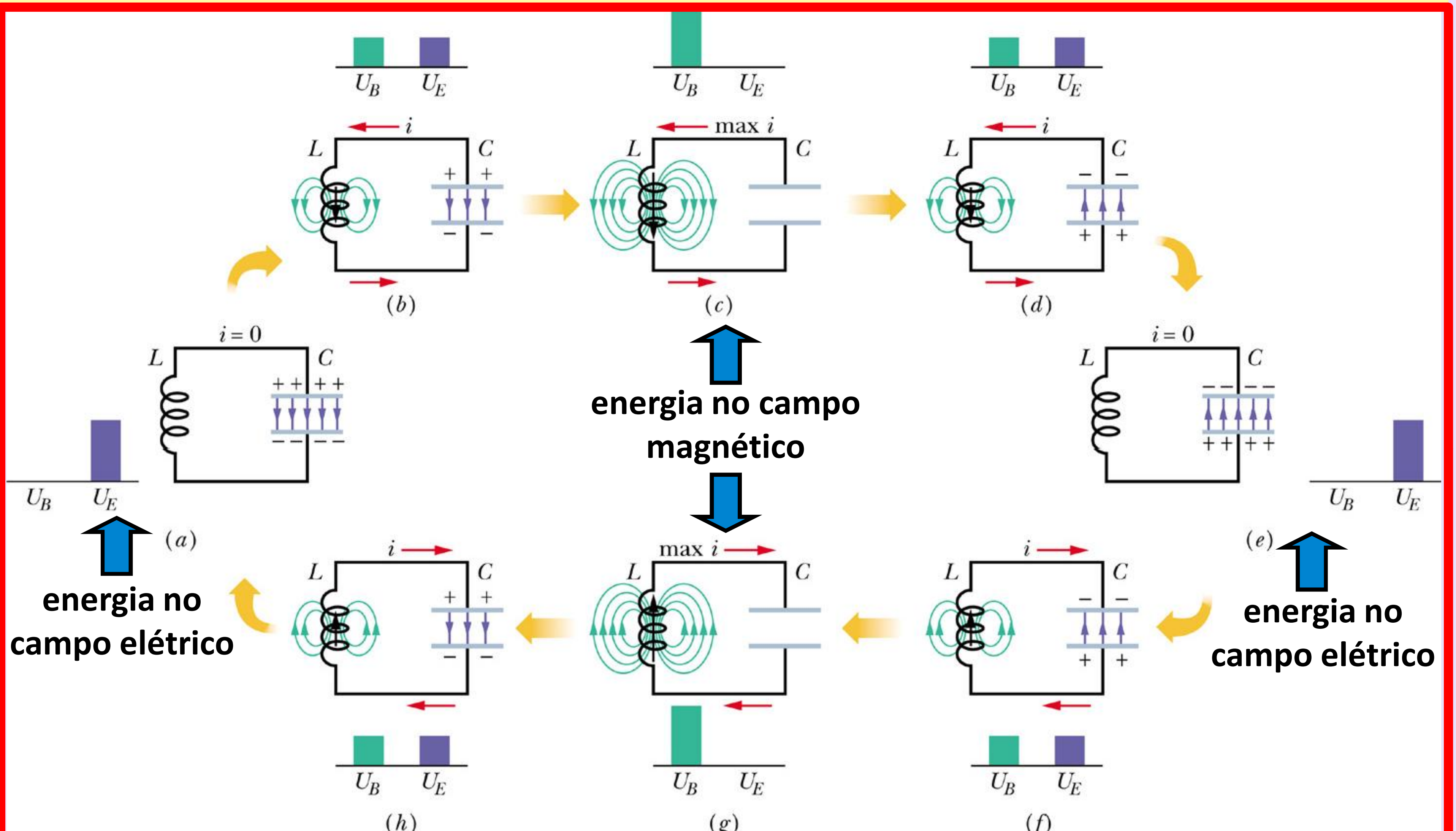
- O capacitor se carrega toatalmemte ($Q=Q_{máx}$)
- Neste momento toda a energia do capacitor está armazenada no seu campo elétrico $\Rightarrow U_E = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$

2) Chave ligada em B:

- O capacitor começa a descarregar
- Toda a energia armazenada no campo elétrico do capacitor é transferida para o campo magnético do indutor $\Rightarrow U_B = \frac{1}{2}Li^2$

Percorrido um tempo o processo se inverte

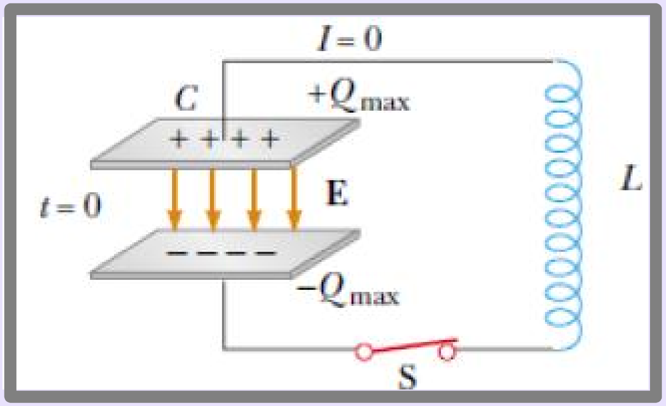
Oscilações LC



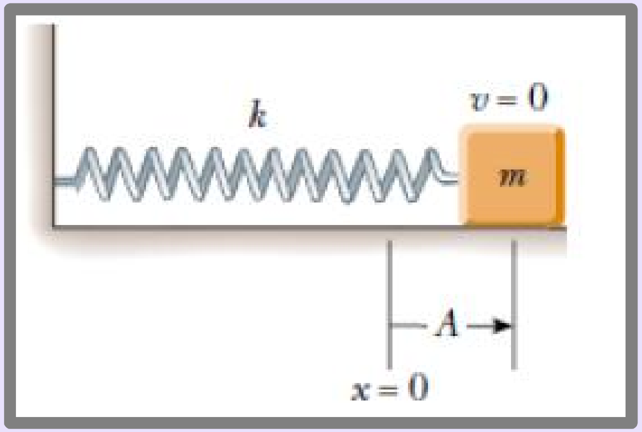
O processo se repete com uma frequência angular $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$

Osciladores harmônicos simples

Circuito LC



Sistema massa-mola



$$\begin{matrix}Energia\\ El\acute{e}trica\end{matrix} : U_E = \frac{q^2}{2C}\ (Capacitor) \Leftrightarrow \begin{matrix}Energia\\ Potencial\end{matrix} : U_p = \frac{kx^2}{2}\ (Mola)$$

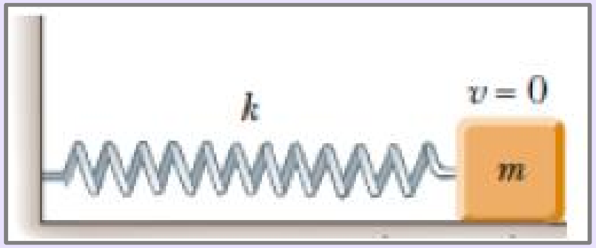
$$\begin{matrix}Energia\\ Magn\acute{e}tica\end{matrix} : U_B = \frac{Li^2}{2}\ (Indutor) \Leftrightarrow \begin{matrix}Energia\\ Cin\acute{e}tica\end{matrix} : U_c = \frac{mv^2}{2}\ (Bloco)$$

$$U_B \Leftrightarrow U_E \qquad\qquad U_c \Leftrightarrow U_p$$

$$Energia\ Total \Rightarrow U_B + U_E = C^{\underline{te}} \quad Energia\ Total \Rightarrow U_c + U_p = C^{\underline{te}}$$

Osciladores harmônicos simples

No sistema massa-mola , **a energia total U** é, em qualquer instante:



$$\Rightarrow U = U_c + U_p$$

Se não houver atrito, **U permanece constante**, isto é:

$$\Rightarrow \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \;\; \left(v = \frac{dx}{dt}\right)$$

cuja solução é: $\Rightarrow x(t) = x_{máx}\ cos(\omega_0 t + \varphi)$

$$\begin{matrix} Movimento \\ Oscilatório \end{matrix} = \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} & Frequência\ de\ oscilação \\ x_{máx} & Amplitude \\ \varphi & Constante\ de\ fase \end{cases}$$

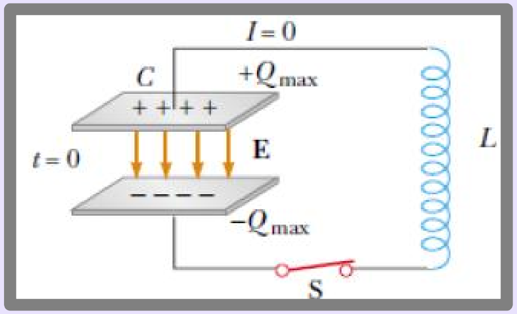
Analogia eletromecânica

	Circuito *LC*	**Sistema massa-mola**
Frequência angular:	$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$	$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$
Amplitude:	Q_m	X_m
Constante de fase:	φ	φ

Correspondências entre os dois sistemas	$q \to x$	$L \to m$
	$i \to v$	$\dfrac{1}{C} \to k$

A amplitude e a constante de fase são determinadas pelas condições iniciais (no circuito *LC*, $i(0)$ e $q(0)$).

Oscilação eletromagnética



Energia no circuito em qualquer instante de tempo:

$$\Rightarrow U = U_B + U_E = \frac{Li^2(t)}{2} + \frac{q^2(t)}{2C}$$

Como não há resistência no circuito, temos:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2q}{dt} + \frac{q}{LC} = 0 \quad \left(i = \frac{dq}{dt}\right)$$

cuja solução é: $\Rightarrow q(t) = q_{máx}\, cos(\omega_0 t + \varphi)$

"A frequência de oscilação depende somente dos valores de L e C do circuito"

$$Movimento\ Oscilatório = \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} & Frequência\ de\ oscilação \\ q_{máx} & Amplitude \\ \varphi & Constante\ de\ fase \end{cases}$$

Oscilação eletromagnética

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega^2}q=0 \qquad \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2}+\omega^2 q=0$$

$$\Rightarrow y^2+\omega^2=0 \Rightarrow q(t)=ae^{yt}+be^{yt}$$

$$\Rightarrow y=\pm i\omega \Rightarrow q(t)=ae^{i\omega t}+be^{-i\omega t}$$

$$q(t)=a(cos\omega t+isen\omega t)+b(cos\omega t-isen\omega t)$$

$$q(t)=(a+b)cos\omega t+i(a-b)sen\omega t$$

$$q(t)=c_1cos\omega t+ic_2sen\omega t$$

Oscilação eletromagnética

$$fazendo \;\; c_1 = Acos\varphi \;\; e \;\; c_2 = iAsen\varphi$$

$$\Rightarrow q(t) = Acos\varphi cos\omega t - Asen\varphi sen\omega t$$

$$como \;\; cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha cos\beta \mp sen\alpha sen\beta$$

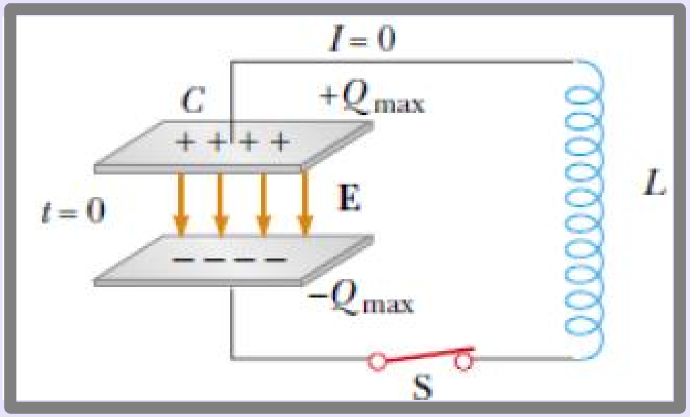
$$\Rightarrow q(t) = Acos(\omega t + \varphi)$$

$$t = 0 \Rightarrow a \; carga \; no \; capacitor \; é \; máxima$$

$$\Rightarrow cos(\omega t + \varphi) = 1 \Rightarrow q_{máx} = A$$

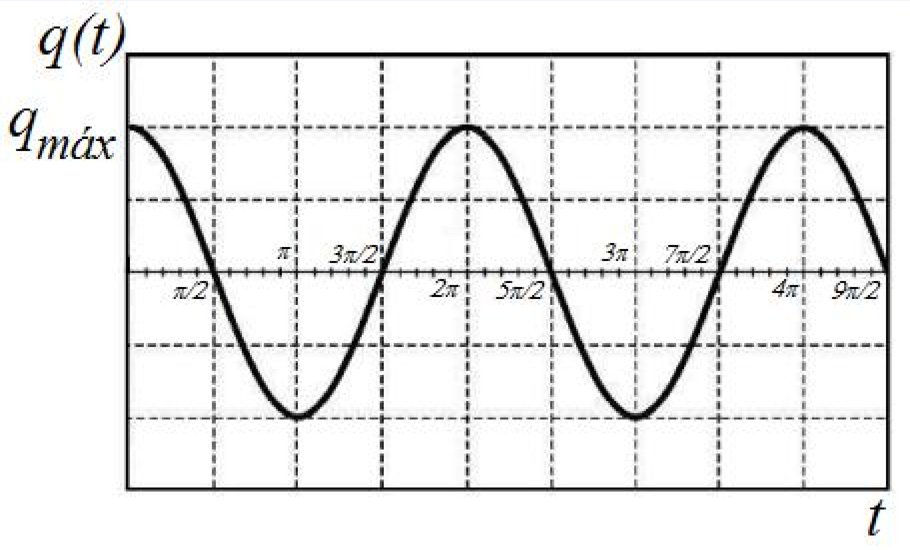
$$\boxed{\Rightarrow q(t) = q_{máx} \, cos(\omega t + \varphi)}$$

Comportamento da carga

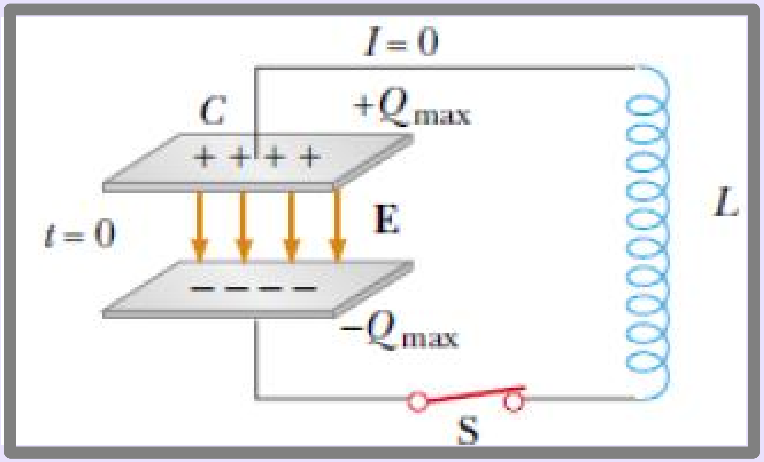


$$q(t) = q_{máx}\, cos(\omega t + \varphi)$$

$$Em\ t = 0 \Rightarrow q(0) = q_{máx}\, cos\varphi \Rightarrow cos\varphi = 1\ se\ \varphi = 0$$



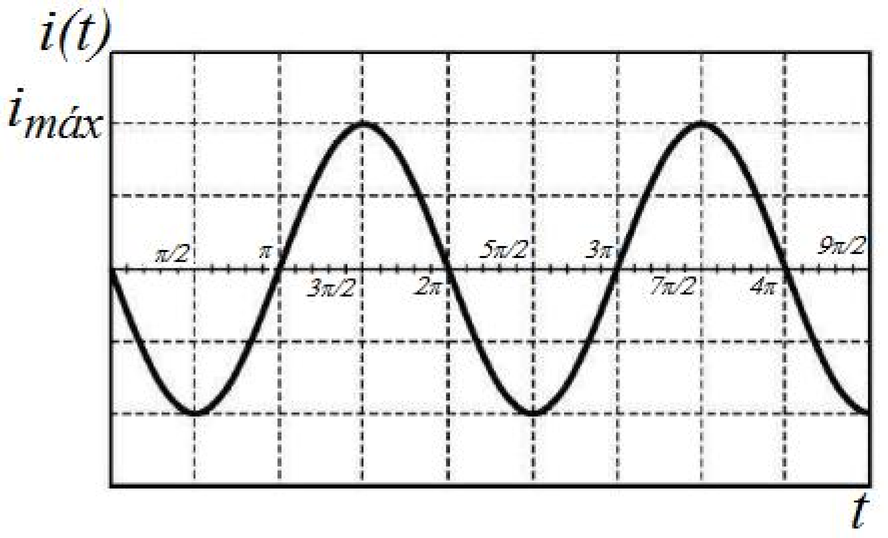
Comportamento da corrente



$$i = \frac{dq}{dt} = -\underbrace{\omega q_{máx}}_{i_{máx}}\ sen(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow i(t) = -i_{máx}\ sen(\omega t + \varphi)$$

$$Em\ t = 0 \Rightarrow i(t) = 0 \Rightarrow sen(\varphi) = 0\ se\ \varphi = 0$$



Conservação da energia

- Energia armazenada no campo elétrico em cada instante da oscilação

$$U_E = U_C = \frac{q_{máx}^2}{2C}\, cos^2\omega t$$

- Energia armazenada no campo magnético em cada instante da oscilação

$$U_B = U_L = \frac{Li_{máx}^2}{2}\, sen^2\omega t$$

$$U = U_C + U_L$$

$$U = \frac{q_{máx}^2}{2C}\, cos^2\omega t + \frac{Li_{máx}^2}{2}\, sen^2\omega t$$

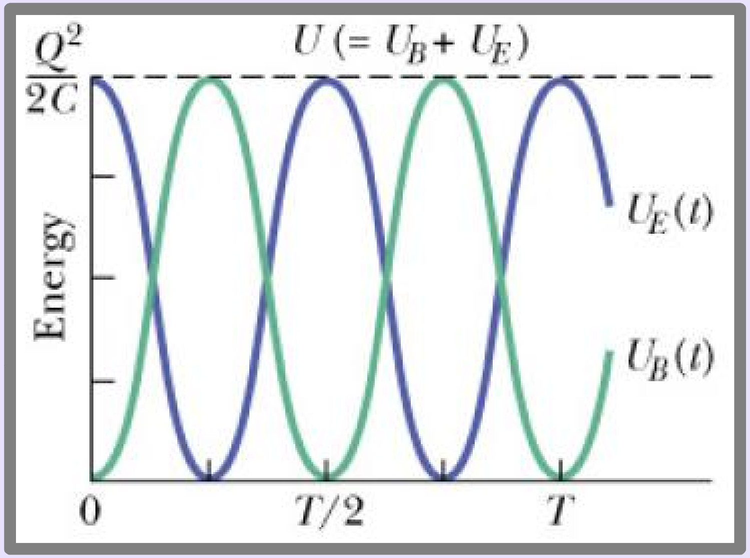
$$\frac{q_{máx}^2}{2C} = \frac{Li_{máx}^2}{2}$$

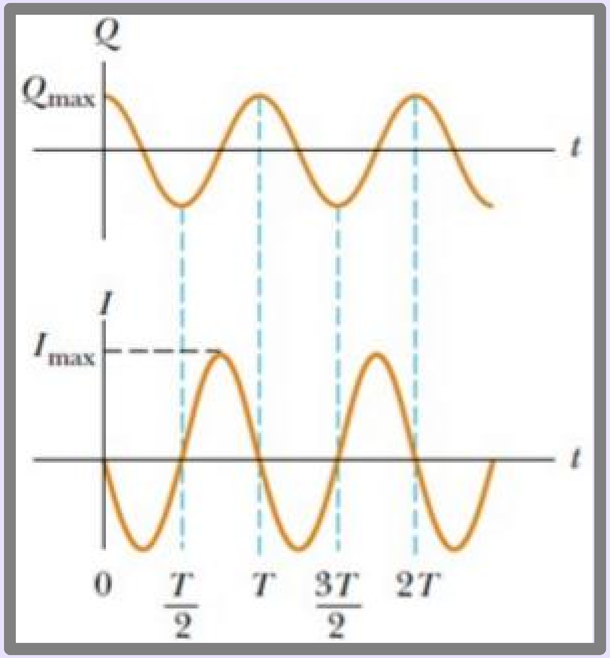
$$\Rightarrow U = \frac{q_{máx}^2}{2C}\underbrace{(cos^2\omega t + sen^2\omega t)}_{1} = \frac{Li_{máx}^2}{2}\underbrace{(cos^2\omega t + sen^2\omega t)}_{1}$$

$$\Rightarrow U = \frac{q_{máx}^2}{2C} = \frac{Li_{máx}^2}{2} = C^{\underline{te}}\ no\ tempo$$

Conservação da energia

$$U = U_C + U_L = \frac{q^2_{máx}}{2C}\ cos^2\omega t + \frac{Li^2_{máx}}{2}\ sen^2\omega t$$





Oscilações amortecidas

- Circuito LC real ⇨ possui resistência R

⇨ U não é mais constante no tempo

⇩

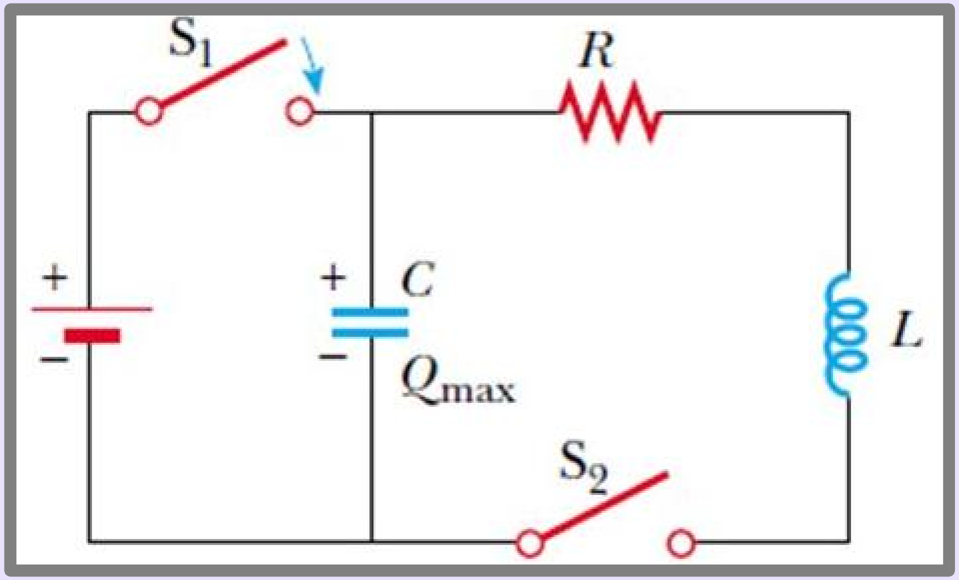
A energia é dissipada pela resistência do circuito

⇩

$$\frac{dU}{dt} = -i^2 R$$

A energia decresce no tempo

Circuito RLC em série



$$\frac{dU}{dt} = -i^2 R$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}(U_L + U_C)$$

$$como\ i = \frac{dq}{dt} \qquad \Rightarrow -i^2 R = Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt}$$

$$\Rightarrow -iR = L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$$

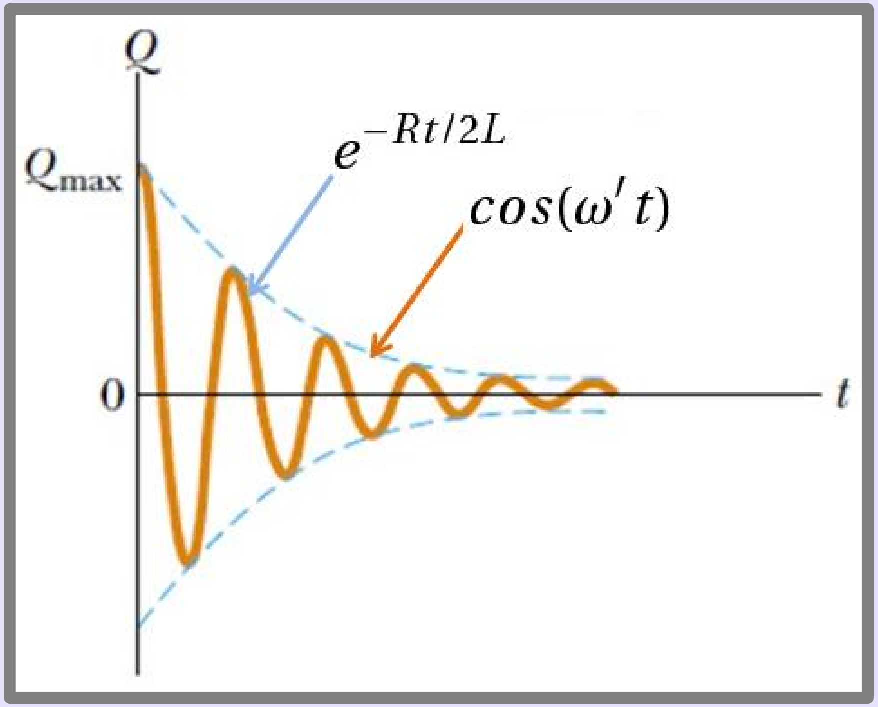
$$Sendo\ \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} \qquad \Rightarrow L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$$

Circuito RLC em série

eq. diferencial $\Rightarrow \dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{RC} = 0$

Solução geral $\Rightarrow q(t) = q_{máx}\, e^{-\frac{Rt}{2L}}\, cos(\omega' t + \varphi)$

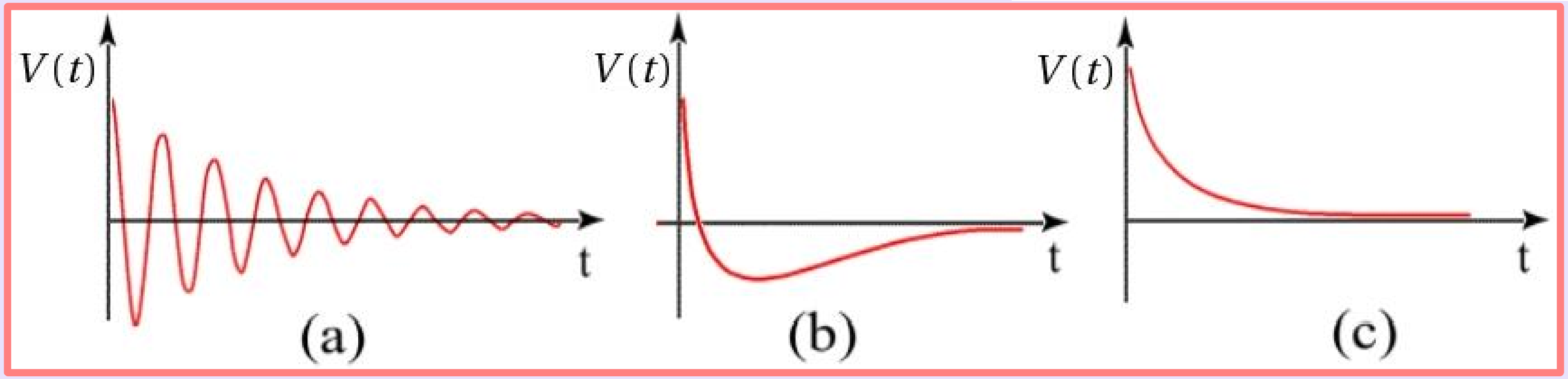
$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - (R/2L)^2}\,; \;\; \omega^2 = \frac{1}{LC}$$



Circuito RLC em série

$$V(t) = Ri = R\frac{dq}{dt} = V_{máx}\, e^{-\frac{Rt}{2L}}\, sen(\omega' t + \varphi)$$

$$\omega' = \sqrt{\left(\frac{1}{LC}\right)^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$



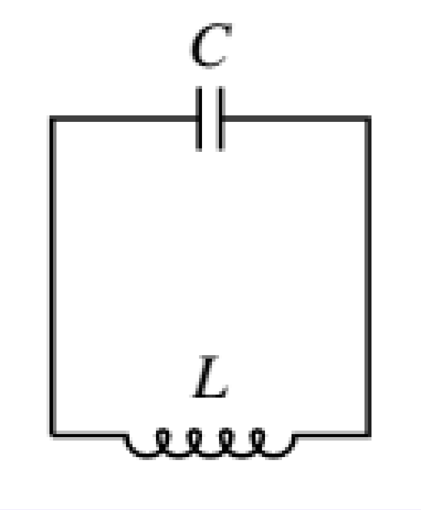
$$a)\ \left(\frac{1}{LC}\right)^2 > \left(\frac{R}{2L}\right)^2 \Rightarrow oscilação\ subamortecida$$

$$b)\ \left(\frac{1}{LC}\right)^2 = \left(\frac{R}{2L}\right)^2 \Rightarrow oscilação\ crítico$$

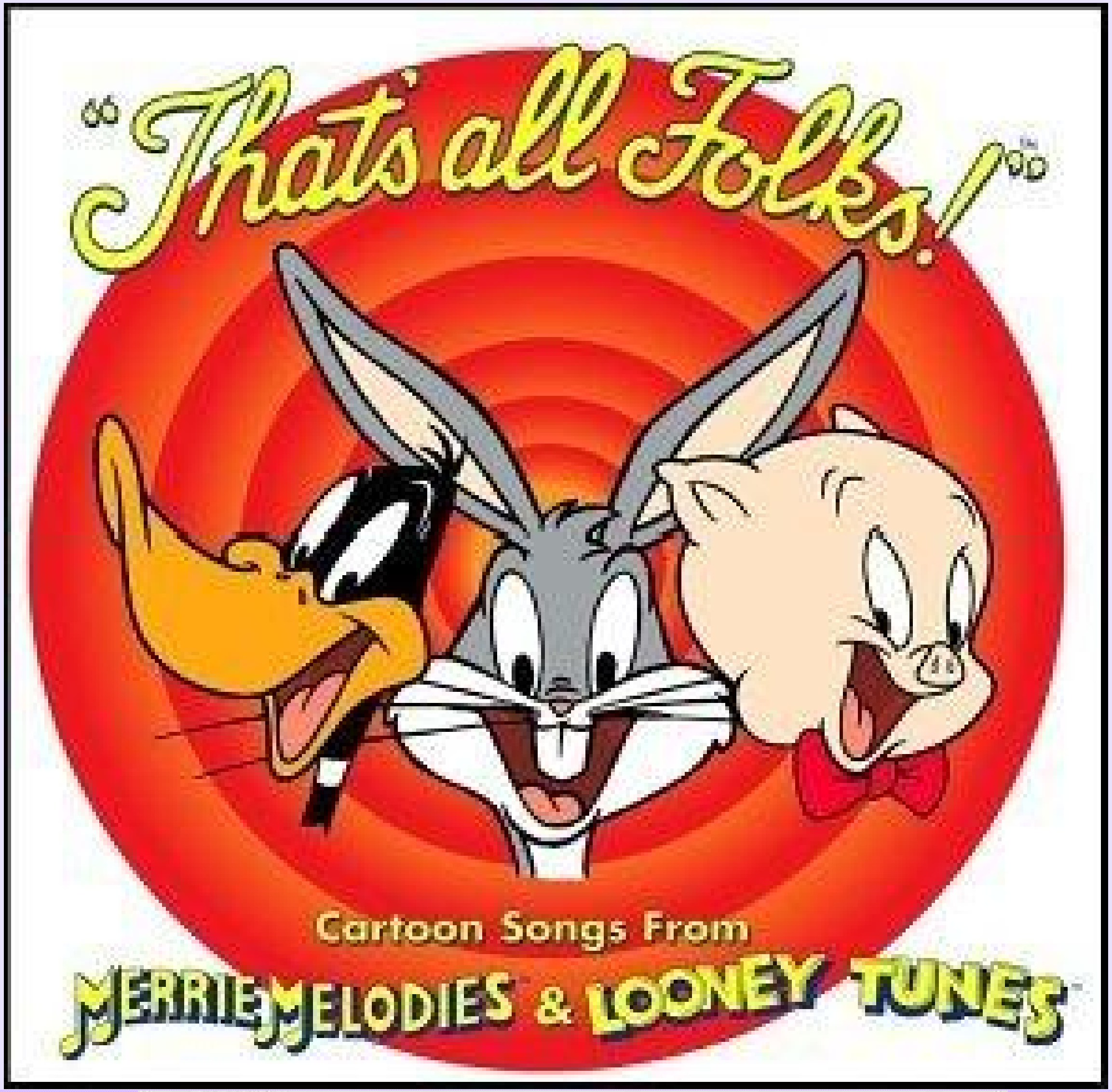
$$c)\ \left(\frac{1}{LC}\right)^2 < \left(\frac{R}{2L}\right)^2 \Rightarrow oscilação\ superamortecido$$

Aplicação (contagem do tempo)

Contagem de tempo $\Rightarrow$ circuito oscilante LC



FIM


"That's all Folks!"
Cartoon Songs From
MERRIE MELODIES & LOONEY TUNES