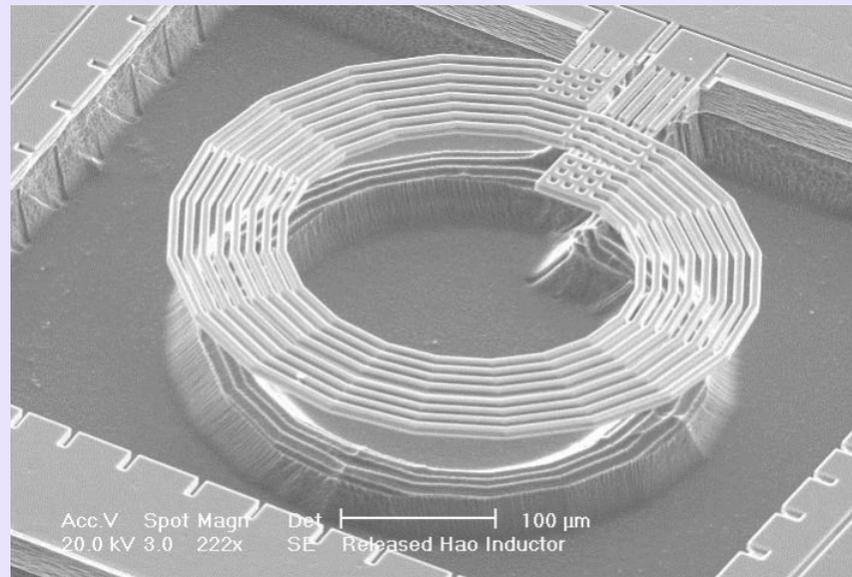


Indutores



Prof. Fábio de Oliveira Borges

Curso de Física II

Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense

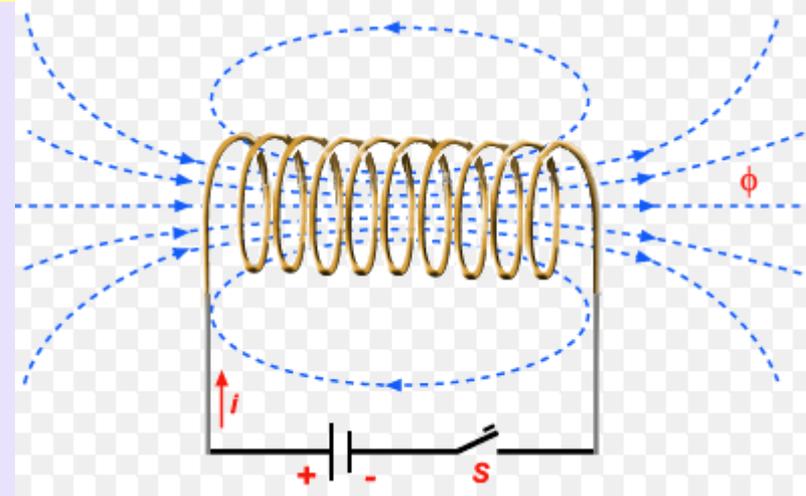
Niterói, Rio de Janeiro, Brasil

<https://cursos.if.uff.br/!fisica2-0217/doku.php>

Indutância

Na figura ao lado a chave s é ligada e uma corrente elétrica é criada em um solenóide.

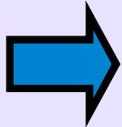
Se a corrente aumenta no tempo: $di/dt > 0$ o campo magnético no solenóide aumenta: $dB/dt > 0$ e pela lei de Faraday: uma fem é induzida, opondo-se a dB/dt e di/dt , opondo-se dessa maneira à direção de i .



$$\varepsilon = -N \frac{d\phi_B}{dt}, \quad N \rightarrow \text{número de espiras do solenóide}$$

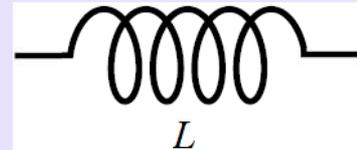
- Este efeito é chamado de **Auto-Indução**.
- O elemento que sofre a Auto-Indução é chamado de **Indutor**.

Indutor



É um componente de circuito que armazena energia no campo magnético criado no seu interior por uma corrente.

Símbolo



É caracterizado por sua indutância, L , que depende somente das suas características geométricas.

fem induzida em indutores

Considere uma bobina de N voltas, chamada de *indutor*, percorrida por uma corrente i que produz um fluxo magnético ϕ_B através de todas as espiras da bobina. Se $i=i(t)$, pela lei de Faraday aparecerá nela uma fem dada por:

$$\varepsilon = -\frac{d(N\phi_B)}{dt}; \quad (N\phi_B) \rightarrow \textit{fluxo total no indutor}$$

Pela lei de Ampère temos que o campo magnético no interior do indutor é dado por:

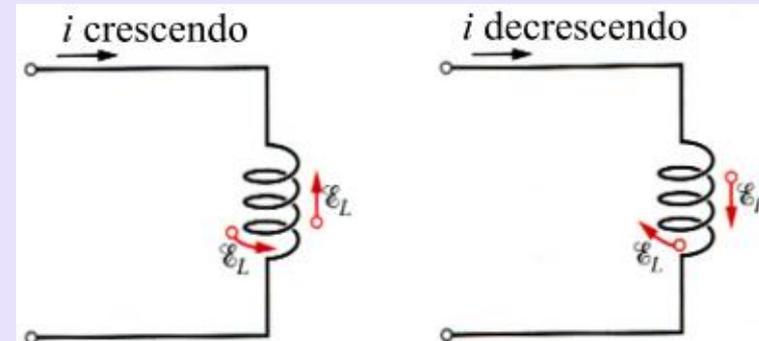
$$\Rightarrow B = \mu_0 n i$$

Se a corrente no indutor estiver variando no tempo, o fluxo magnético no interior do indutor também irá variar.

$$i = i(t) \Rightarrow \phi_B = \phi_B(i(t))$$

$$\Rightarrow \varepsilon_L = -N \overbrace{\frac{d\phi_B}{di}}^{L \rightarrow \textit{indutância}} \frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_L = -L \frac{di}{dt}$$



O sentido de ε_L deve se opor à variação da corrente que a originou.



Calculando a indutância

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}(N\phi_B) \Rightarrow \text{fem induzida em uma bobina com } N \text{ voltas.}$$

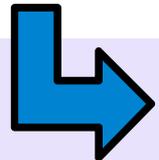
Como a fem induzida é proporcional a taxa de variação da corrente, temos:

$$L\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}(N\phi_B)$$

Integrando no tempo:

$$Li = N\phi_B$$

$$\Rightarrow L = \frac{N\phi_B}{i}$$

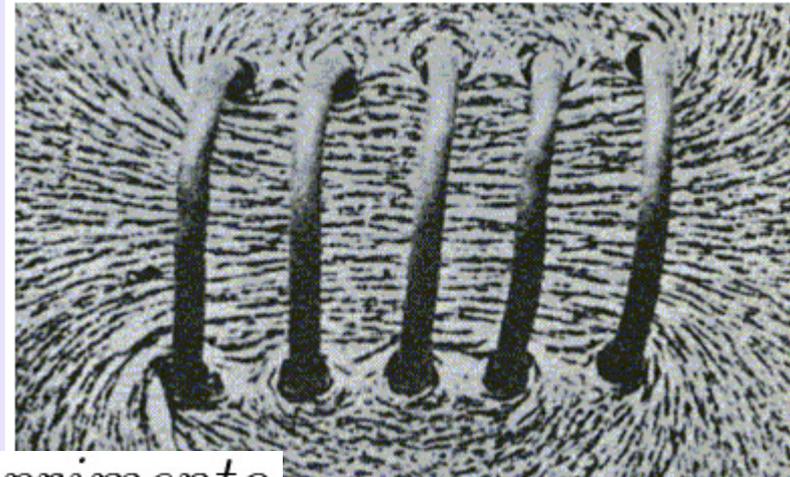


Esta eq. permite encontrarmos a indutância diretamente a partir do fluxo magnético

Indutância de um solenóide

$$B = \mu_0 n i$$

↳ Campo magnético de um solenóide com área A e comprimento l quando conduz uma corrente i .



$n \rightarrow n^{\circ}$ de espiras por unidade de comprimento

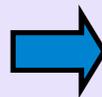
$$N\phi_B = (nl)(BA)$$

$$\Rightarrow N\phi_B = \mu_0 n^2 l i A$$

$$L = \frac{N\phi_B}{i} = \frac{\mu_0 n^2 l i A}{i} = \mu_0 n^2 l A$$

↳ Só depende das características geométricas do solenóide

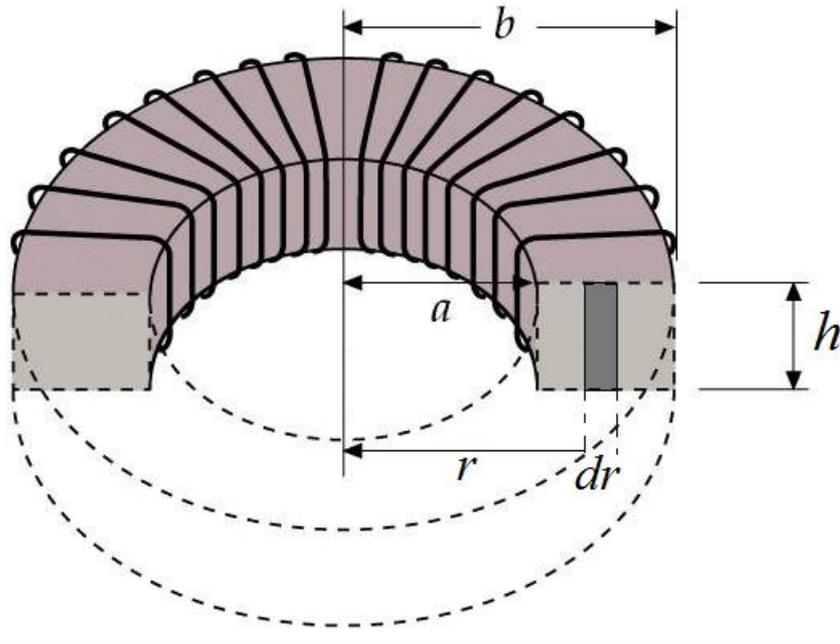
Indutância por unidade de comprimento



$$\frac{L}{l} = \mu_0 n^2 A$$



Indutância de um toróide



$$B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r}$$

Campo magnético de um toróide

B não é constante no interior do toróide

$$\phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_a^b B (h dr)$$

$$= \int_a^b \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} h dr$$

$$\phi_B = \frac{\mu_0 N i h}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 N i h}{2\pi} [\ln(r)]_a^b$$

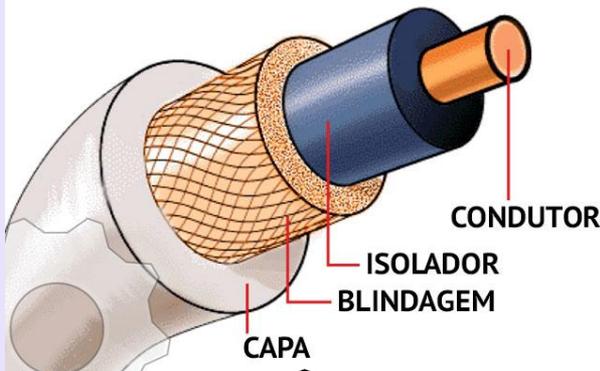
$$\phi_B = \frac{\mu_0 N i h}{2\pi} [\ln(b) - \ln(a)] = \frac{\mu_0 N i h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

A indutância de um toróide só depende de seus fatores geométricos

$$\Rightarrow L = \frac{N\phi_B}{i} = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$



Indutância de um cabo coaxial



dois condutores
concêntricos separados
por um dielétrico

O campo magnético tem linhas
circulares, nas quais o campo
vale:

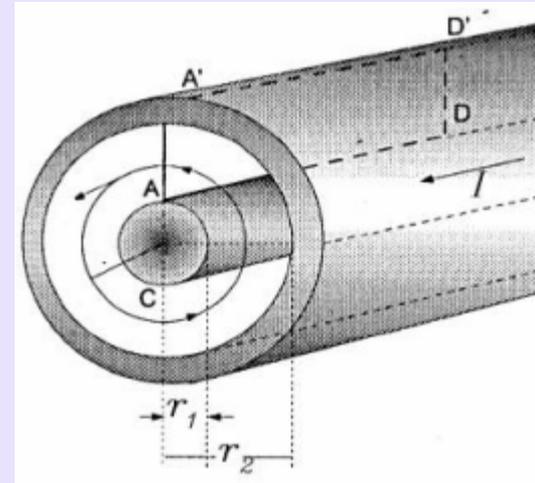
$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

Portanto o fluxo que atravessa
a seção AA' DD' é:

$$\phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} l dr$$

$$= \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i l}{2\pi} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$$

$$\text{como } L = \frac{N\phi_B}{i} \Rightarrow L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$$

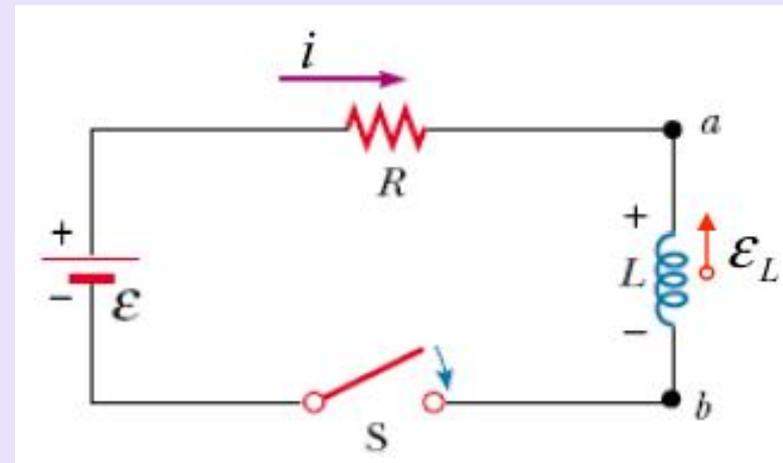


Circuito RL

Circuitos RL são aqueles que contêm resistores e indutores. Neles, as correntes e os potenciais variam com o tempo. Apesar das fontes (fem) que alimentam estes circuitos serem independentes do tempo, a introdução de indutores provoca efeitos dependentes do tempo. Estes efeitos são úteis para controle do funcionamento de máquinas e motores.

a) Fechando-se a chave S , no instante $t = 0$, estabelece-se uma corrente crescente no resistor .

$t = 0 \Rightarrow i(0) = 0 \rightarrow$ No início o indutor se comporta como se tivesse uma resistência infinita



$t \rightarrow \infty \Rightarrow i(t) = i_{máx} \rightarrow$ Muito tempo depois o indutor se comporta como se tivesse uma resistência nula.

Circuito RL

Aplicando a lei das malhas $\Rightarrow \Delta V_\varepsilon + \Delta V_R + \Delta V_L = 0$

$$\varepsilon - iR - L \frac{di}{dt} = 0$$

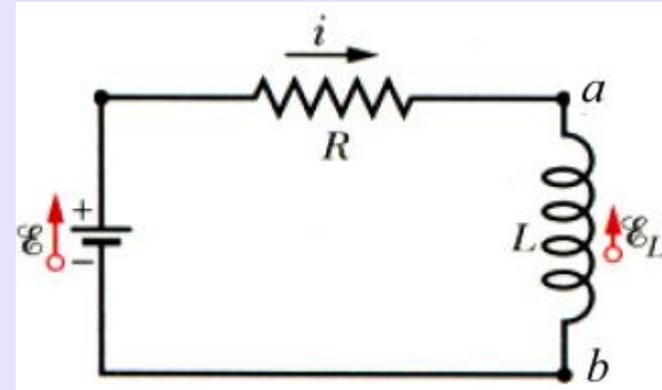
$$\varepsilon = iR + L \frac{di}{dt} \rightarrow \varepsilon = \Delta V_R + \Delta V_L$$

$$\frac{\varepsilon}{R} = i + \frac{L}{R} \frac{di}{dt}$$

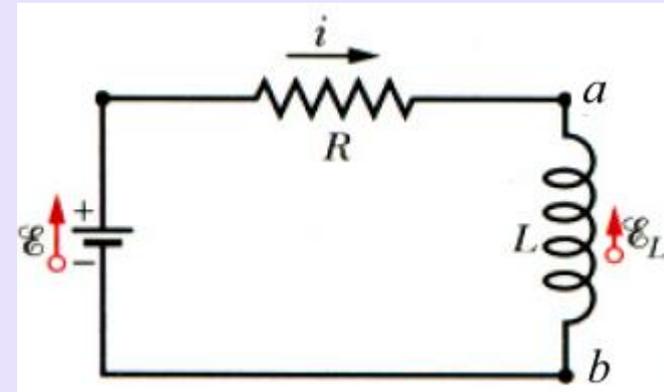
$$\Rightarrow \frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i - \frac{\varepsilon}{R} = 0$$

mudando de variável : $x = i - \frac{\varepsilon}{R} \Rightarrow dx = di$,

$$\Rightarrow x + \frac{L}{R} \frac{dx}{dt} = 0$$



Circuito RL



$$\frac{dx}{x} = -\frac{R}{L}dt$$

$$\text{integrando} \Rightarrow \ln \left(\frac{x}{x_0} \right) = -\frac{R}{L}t$$

$$\Rightarrow x = x_0 \exp \left(-\frac{R}{L}t \right)$$

$$\text{em } t = 0, i_0 = 0 \Rightarrow x_0 = i_0 - \frac{\varepsilon}{R} \Rightarrow x_0 = -\frac{\varepsilon}{R}$$

$$\Rightarrow i - \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{\varepsilon}{R} \exp \left(-\frac{Rt}{L} \right)$$

$$\Rightarrow i = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - \exp \left(-\frac{Rt}{L} \right) \right)$$



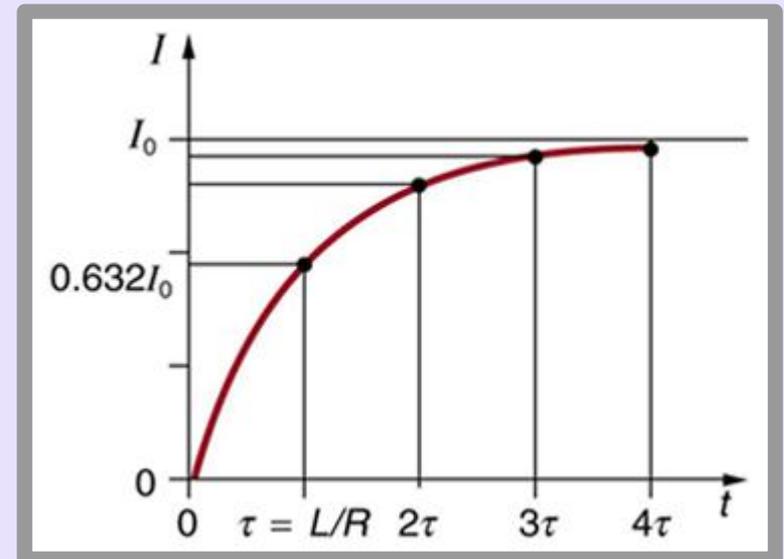
Circuito RL

fazendo $\tau_L = \frac{L}{R} \rightarrow$ constante de tempo

$$\Rightarrow i(t) = \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_L}\right) \right)$$

$$t = 0 \Rightarrow i(t) = 0; t \rightarrow \infty \Rightarrow i \rightarrow \frac{\varepsilon}{R}$$

$$t = \tau_L \Rightarrow i(t) = 0,63 \frac{\varepsilon}{R}$$



Circuito RL

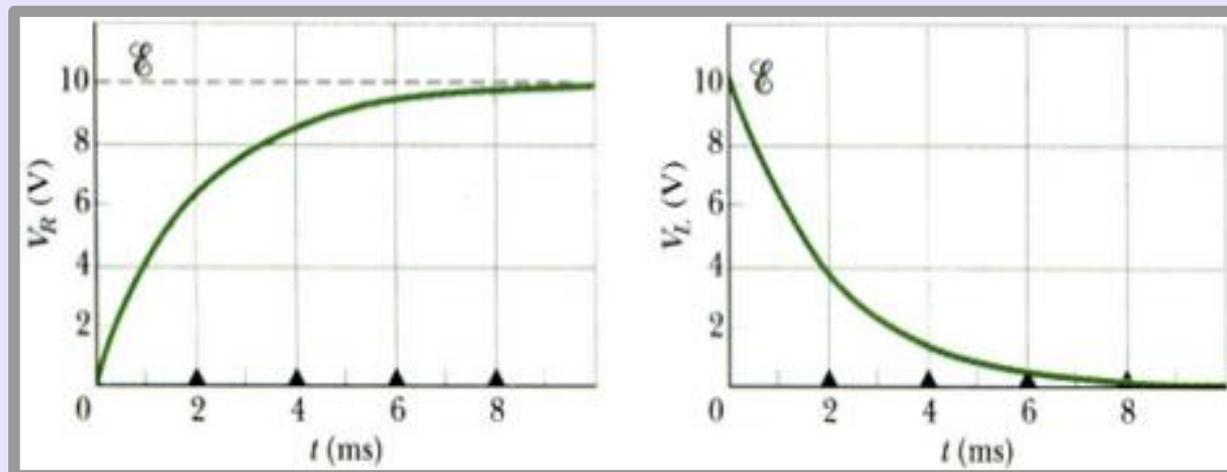
Voltagens no resistor e no indutor

$$V_R = Ri; \quad V_L = L \frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow V_L = -L \frac{\varepsilon}{R} \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) \times -\frac{R}{L} = \varepsilon \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right)$$

$t = 0 \Rightarrow V_L = V_{m\acute{a}x} \rightarrow$ equivalente a um circuito aberto

$t \gg \tau_L \Rightarrow V_L = 0 \rightarrow$ equivalente a um curto-circuito



Circuito RL

b) Fechando-se a chave S_2 : neste caso, a soma das quedas de potencial dá:

$$\Delta V_L + \Delta V_R = 0$$

$$L \frac{di}{dt} + iR = 0$$

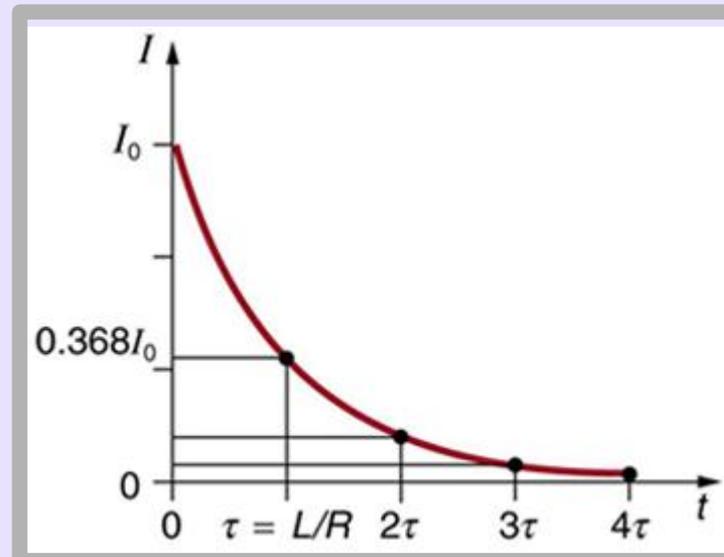
$$\Rightarrow i(t) = i_0 \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right)$$

$$\text{como } \tau_L = \frac{L}{R} \Rightarrow i(t) = i_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_L}\right)$$

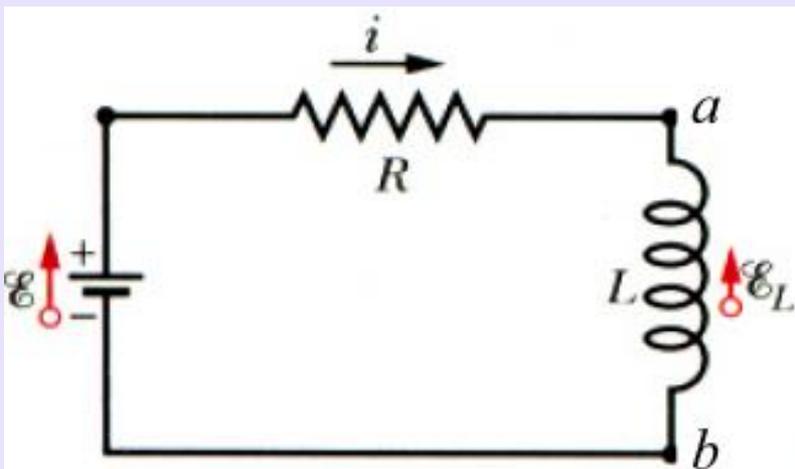
$$t = 0 \Rightarrow i(t) = i_0$$

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow i(t) = 0$$

$$t = \tau_L \Rightarrow i(t) = 0,37i_0$$



Energia armazenada no campo magnético



No circuito ao lado, uma fem induzida pelo indutor impede que a bateria imprima ao circuito uma corrente instantânea. Ou seja, a bateria deve efetuar trabalho contra o indutor para criar uma corrente. Parte da energia gasta pela bateria se dissipa no resistor por efeito joule, enquanto o restante da energia fica no indutor.

$$\varepsilon = \Delta V_R + \Delta V_L$$

$$\varepsilon = iR + L \frac{di}{dt}$$

$$\times i \Rightarrow i\varepsilon = i^2 R + Li \frac{di}{dt}$$

A taxa com que a bateria fornece energia é igual a soma da taxa de energia dissipada no resistor ($i^2 R$) com a taxa de acúmulo de energia no indutor ($Li di/dt$)



Energia armazenada no campo magnético

Logo

$$P = \frac{dU_B}{dt} = Li \frac{di}{dt} = \frac{dW}{dt}$$



Taxa de acúmulo de energia no indutor

$$\Rightarrow dU_B = Lidi$$

$$U_B = \int_0^i Lidi$$

$$\Rightarrow U_B = \frac{1}{2}Li^2$$



Energia magnética total acumulada no campo magnético do indutor



Densidade de energia de um campo magnético

Vamos calcular agora a energia por unidade de volume armazenada em um ponto qualquer de um campo magnético. Para isso, vamos considerar o campo magnético de um solenóide longo de comprimento l e seção transversal A , transportando uma corrente i .

$$\text{indutância do solenóide} \Rightarrow L = \mu_0 n^2 Al$$

$$\text{campo magnético no solenóide} \Rightarrow B = \mu_0 ni \Rightarrow i = \frac{B}{\mu_0 n}$$

$$\Rightarrow U_B = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 Al \frac{B^2}{\mu_0^2 n^2}$$

$$U_B = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} Al$$



Energia magnética armazenada
em um solenóide



Densidade de energia de um campo magnético

$Al \rightarrow$ volume do solenóide

$$\Rightarrow u_B = \frac{U_B}{Al} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

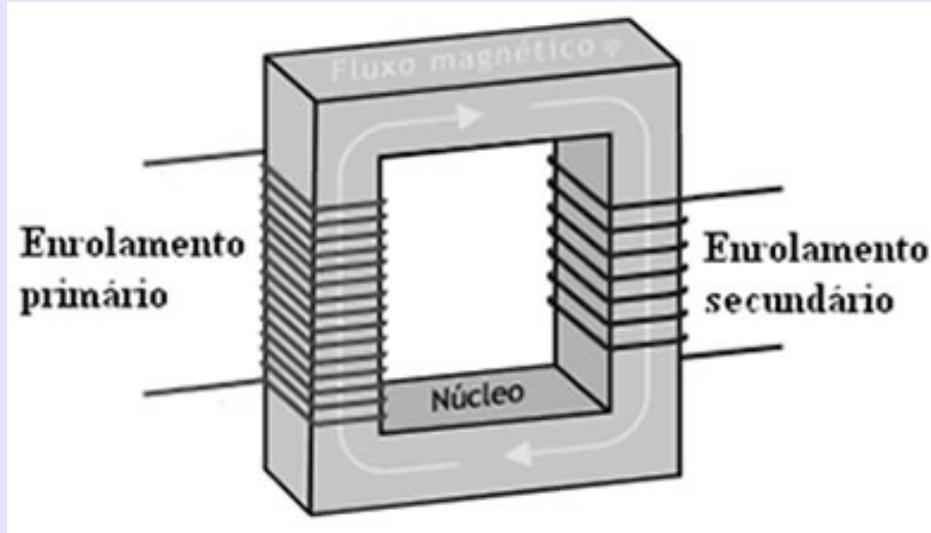


Densidade de energia do campo magnético

“Podemos associar uma densidade de energia a qualquer região do espaço onde exista um campo magnético. O valor desta densidade é dado pela equação acima”



Aplicação (Transformadores)



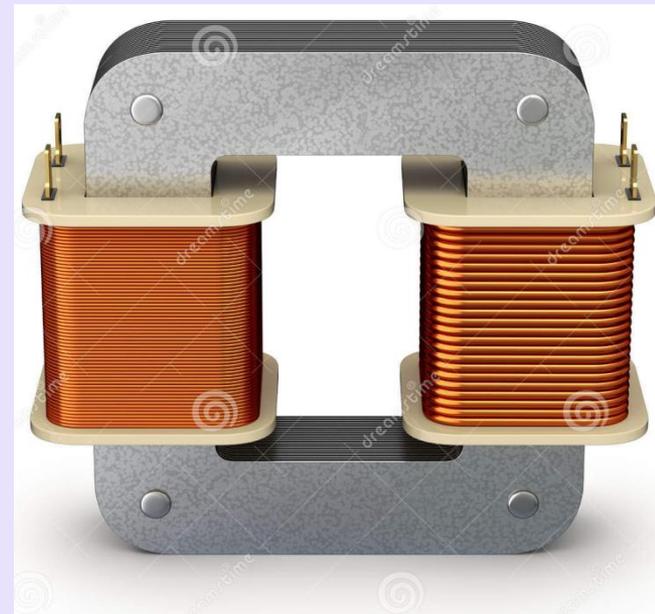
$V_p \rightarrow$ Voltagem no primário
 $V_s \rightarrow$ Voltagem no secundário

$$V_p = -N_p \frac{d\phi_B}{dt} \quad V_s = -N_s \frac{d\phi_B}{dt}$$

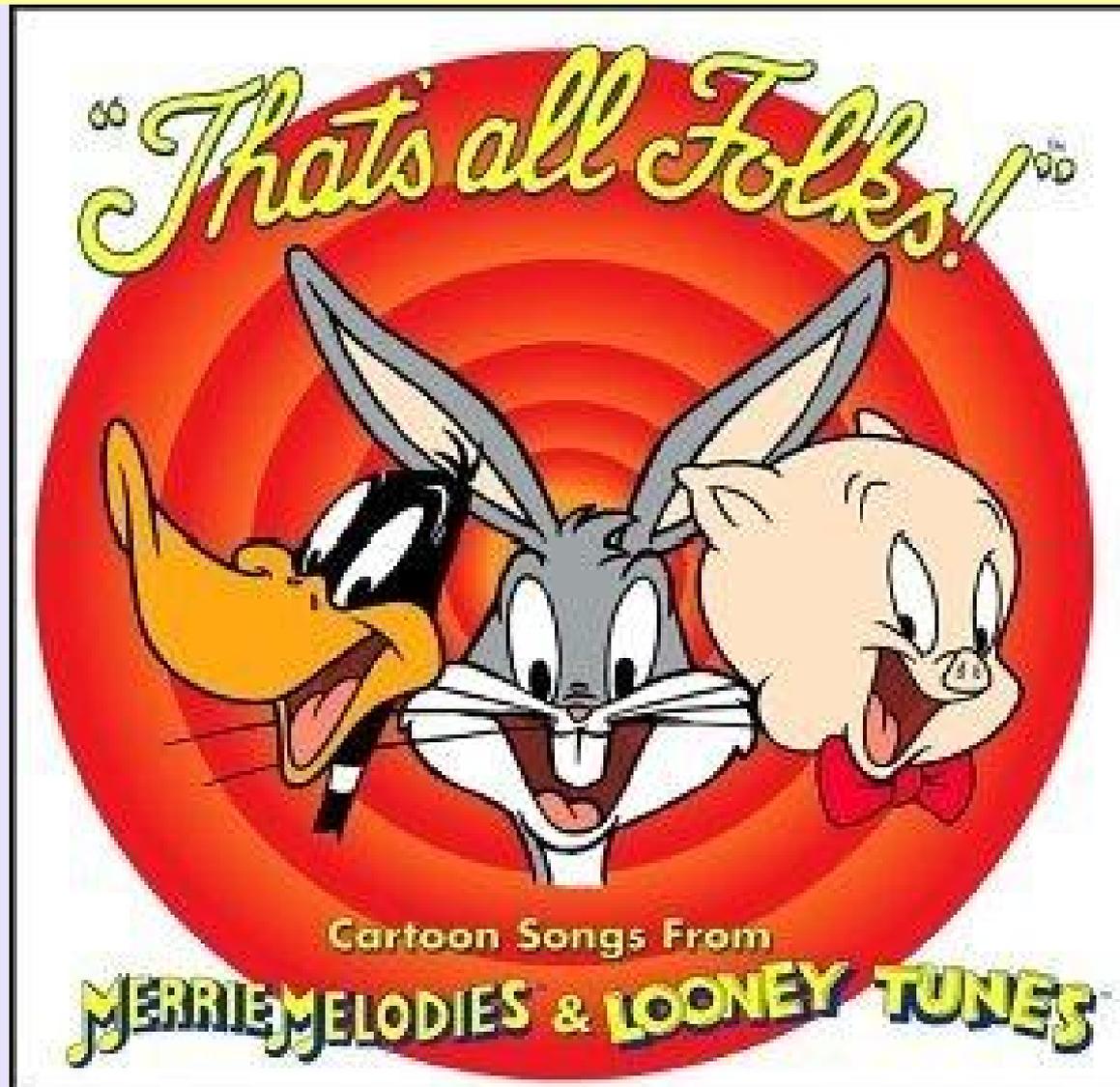
$$\left[\frac{d\phi_B}{dt} \right]_p = \left[\frac{d\phi_B}{dt} \right]_s$$

$$\Rightarrow V_s = \frac{N_s}{N_p} V_p$$

“A razão entre o número de espiras na bobina secundária e na bobina primária determina a tensão de saída em relação à tensão de entrada do transformador.”



FIM



INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense