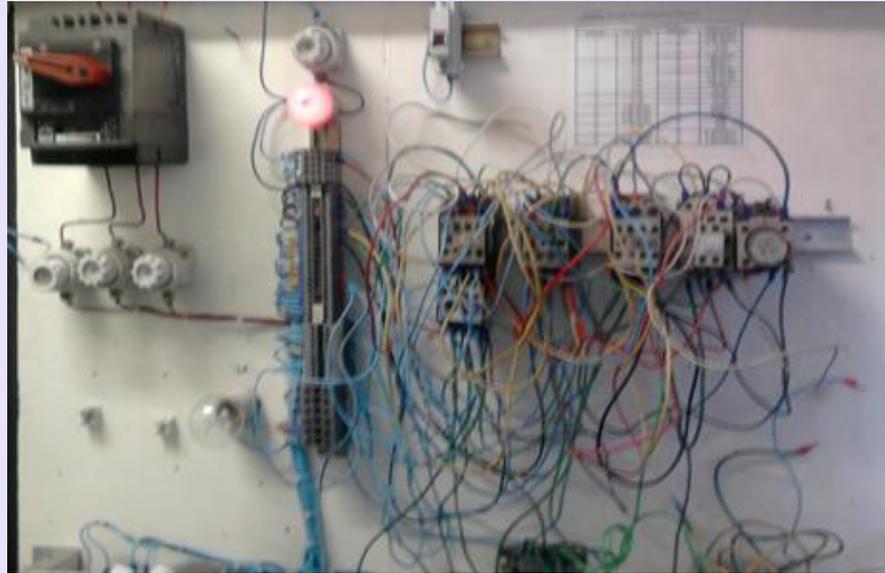


Circuitos elétricos



Prof. Fábio de Oliveira Borges

Curso de Física II

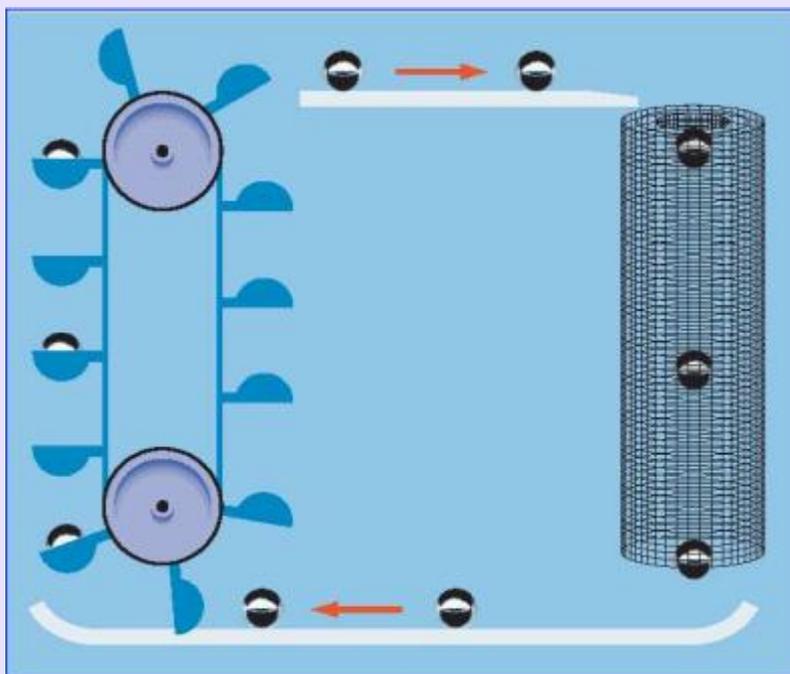
Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense

Niterói, Rio de Janeiro, Brasil

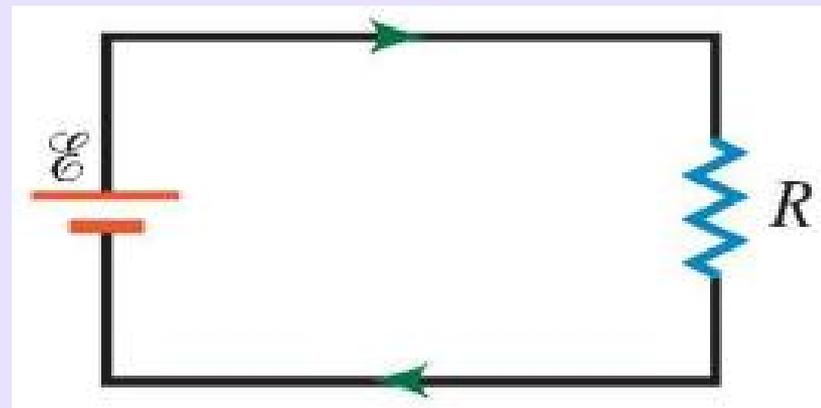
<https://cursos.if.uff.br/!fisica2-0217/doku.php>

Circuito elétrico

Para resolver um circuito de corrente contínua, é preciso entender se as cargas estão ganhando ou perdendo energia potencial elétrica quando passam através dos elementos do circuito.



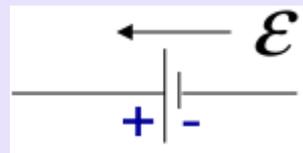
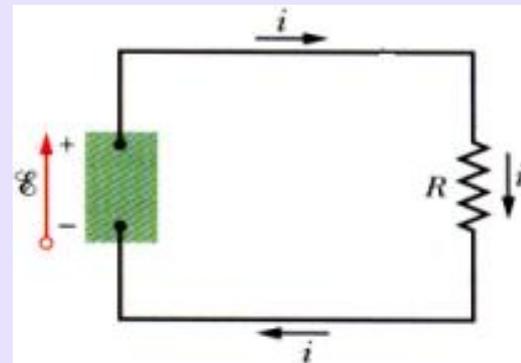
=



Circuito elétrico

Fonte de energia em um circuito DC

Resolver um circuito de corrente contínua (DC) é calcular o valor e o sentido da corrente. Como vimos, para que se estabeleça uma corrente duradoura num condutor, é necessário manter uma diferença de potencial entre suas extremidades. No caso prático, isto é feito por um dispositivo chamado fonte de força eletromotriz (fem), cujo símbolo é:



fonte de força
eletromotriz (fem)



dispositivo que aumenta a energia potencial
das cargas que circulam em um circuito.

Trabalho da fonte

$$\varepsilon = \frac{dW}{dq} \text{ (volt)}$$



fem = trabalho por unidade de carga

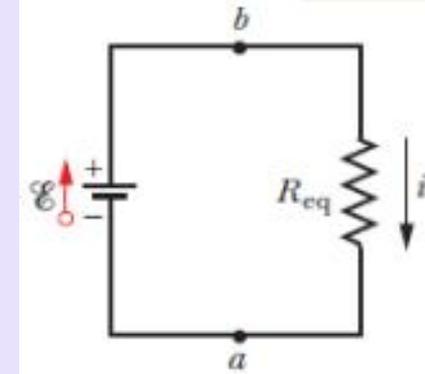
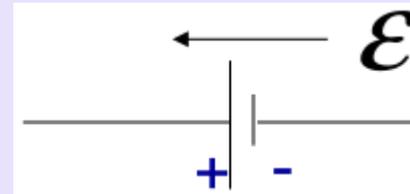


Tipos de fem

Fonte de tensão ideal

- Modelo idealizado de uma bateria
- Bombeamento de cargas sem nenhuma resistência
- Não há energia dissipada na fonte

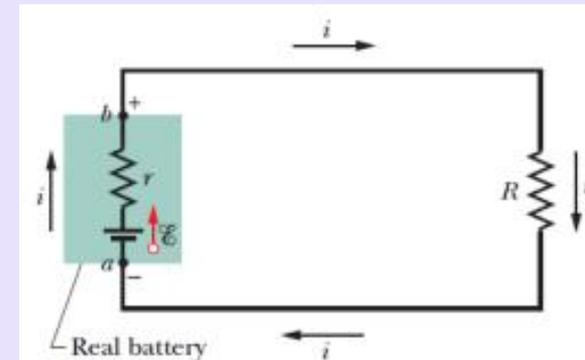
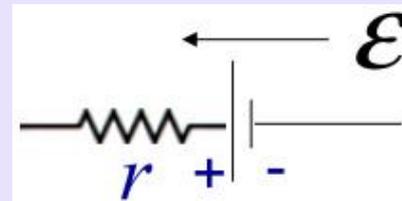
$$\Rightarrow \Delta V = V_b - V_a = \varepsilon$$



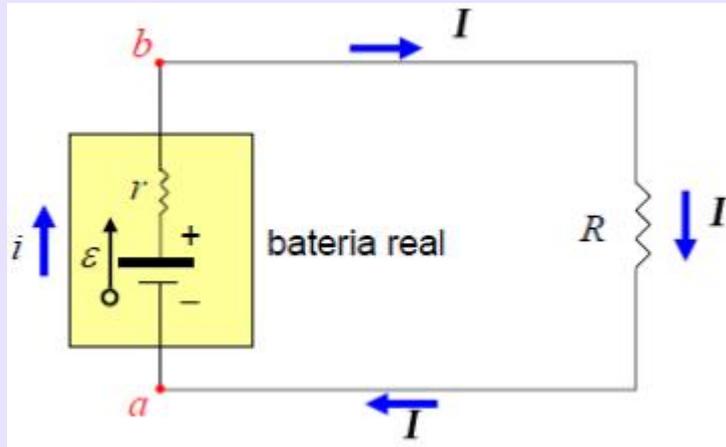
Fonte de tensão real

- Qualquer bateria na prática
- Movimento das cargas afetado pela resistência interna r da bateria
- Há energia dissipada na fonte

$$\Rightarrow \Delta V = V_b - V_a = \varepsilon - ir$$



Circuito com fem real



Bateria real \Rightarrow tem resistência interna (r) \Rightarrow ddp da bateria \neq fem da bateria

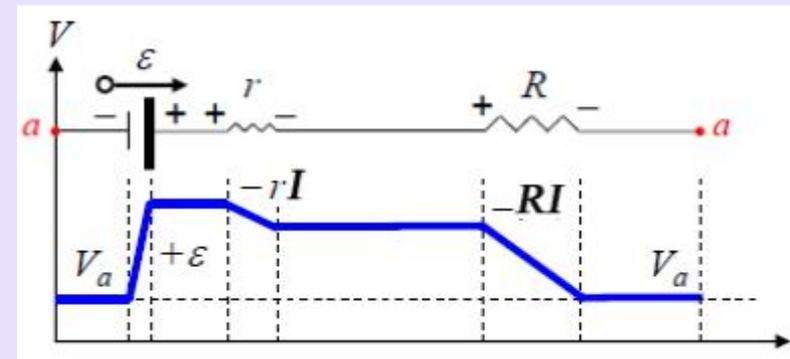
Cargas se deslocam de $a \mapsto b$ \Rightarrow O potencial aumenta de ε



A carga passa pela resistência r e o potencial diminui de $i r$

$$\Rightarrow V = V_b - V_a = \varepsilon - i r$$

A ddp entre os terminais da bateria é igual a diferença de potencial sobre a resistência externa R . $\Rightarrow V = R i$



(I) $\Rightarrow \varepsilon = R i + r i \rightarrow$ **voltagem no circuito aberto**

$\Rightarrow i = \frac{\varepsilon}{R + r} \rightarrow$ **corrente no circuito**

* $i(\varepsilon, r, R)$, se $R \gg r \Rightarrow i(\varepsilon, R)$



Circuito com fem real

Conservação da energia

multiplicando (I) por i $\Rightarrow i\varepsilon = \underbrace{i^2 R + i^2 r}$

potência cedida \leftarrow \rightarrow potência dissipada

$i\varepsilon \rightarrow$ Potência cedida pela fonte de força eletromotriz

$i^2 r \rightarrow$ Potência dissipada pela resistência interna da bateria

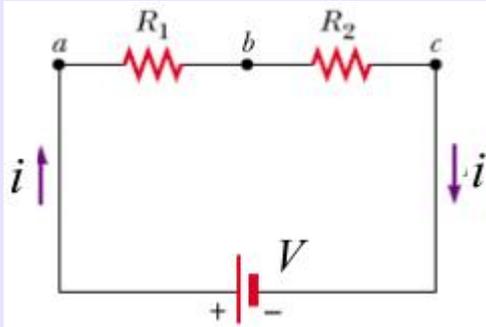
$i^2 R \rightarrow$ Potência dissipada pela resistência externa a bateria

Potência total
dissipada pelo efeito
Joule



Associação de resistências em séries

Resistência em série



$$V_b - V_a = V_1 = R_1 i$$

$$V_c - V_b = V_2 = R_2 i$$

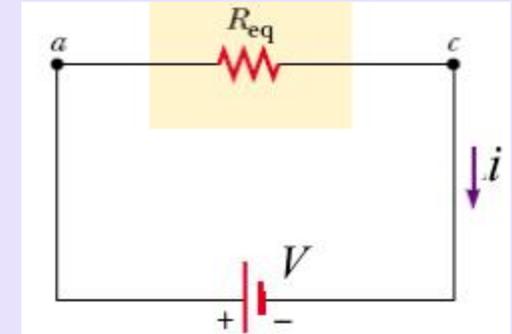
“A corrente é a mesma através de cada resistor, pois qualquer carga que passa por R_1 deve ser igual a carga que passa por R_2 ”

$$V = V_1 + V_2$$

$$R_{eq} i = i(R_1 + R_2)$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

Resistência equivalente



$$V_c - V_a = V = R_{eq} i$$

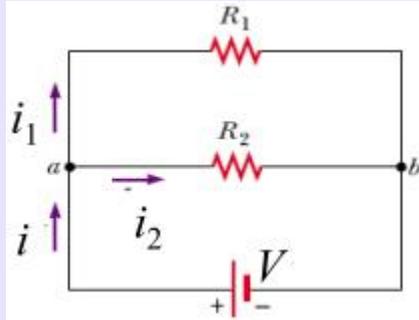
$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i$$

A resistência equivalente de resistores ligados em série é sempre maior que qualquer das resistências individuais.



Associação de resistências em paralelo

Resistência em paralelo



$$i_1 = \frac{V}{R_1}; \quad i_2 = \frac{V}{R_2}$$

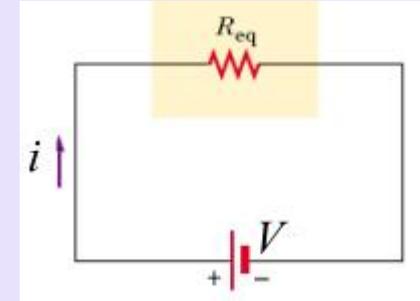
“A diferença de potencial é a mesma em cada resistor”

$$i = i_1 + i_2$$

$$\frac{V}{R_{eq}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Resistência equivalente



$$i = \frac{V}{R_{eq}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

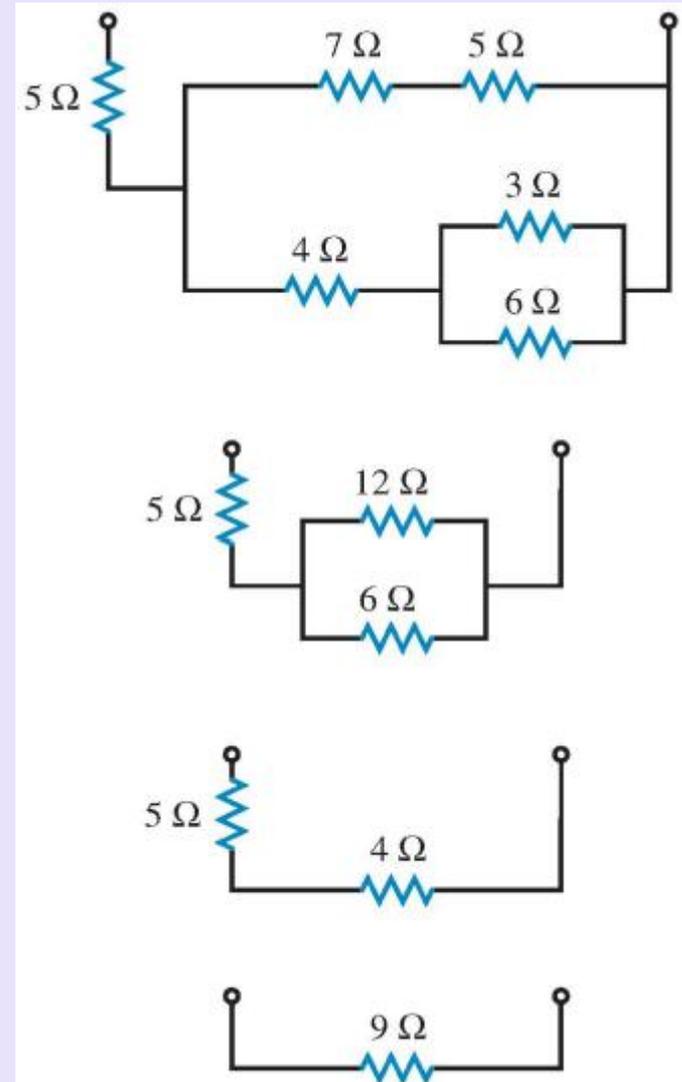
A resistência equivalente de dois ou mais resistores ligados em paralelo é sempre menor que a menor resistências presente no circuito.



Estratégia de resolução

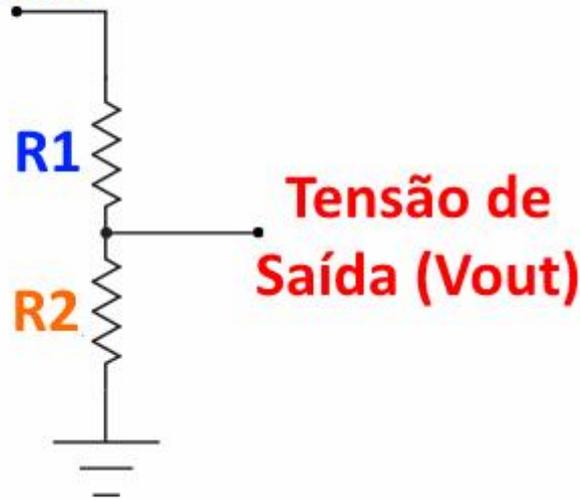
Etapas

- Desenhar o circuito colocando em evidência as associações
- Série: R uma depois da outra
- Paralelo: Separação da corrente
- Pode deslocar uma junção de fios ao longo de um fio
- Calcular a R_{eq} da associação menor
- Desenhar o novo circuito
- Calcular a R_{eq} da associação menor
- ... até obter somente uma R_{eq}



Divisor de tensão

Tensão de Entrada
(V_{in})



$$V_{in} = (R_1 + R_2)i$$

$$V_{out} = R_2i \quad \Rightarrow \quad i = \frac{V_{out}}{R_2}$$

$$\Rightarrow V_{in} = (R_1 + R_2) \frac{V_{out}}{R_2}$$

$$V_{in} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} V_{out}$$

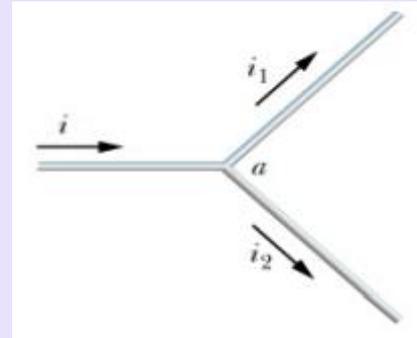


As regras de Kirchhoff

- **Conservação da carga**

1- A soma das correntes que entram num nó é igual a soma das correntes que saem do mesmo nó. (um nó é qualquer ponto do circuito onde é possível a divisão da corrente)

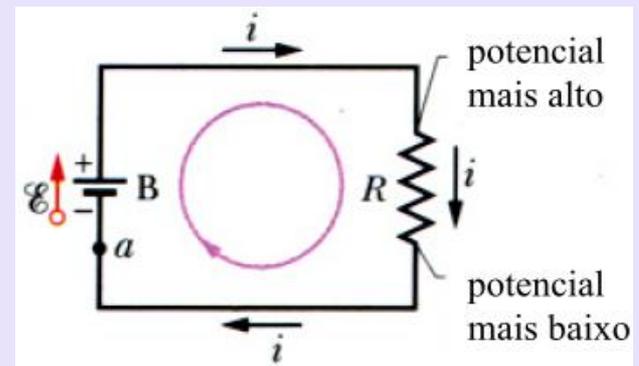
$$i = i_1 + i_2$$



- **Conservação da energia**

2- A soma algébrica das variações de potencial em todos os elementos de uma malha fechada do circuito é igual a zero.

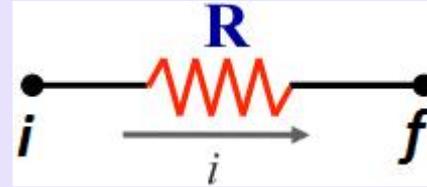
$$\sum \Delta V = 0 \Rightarrow \varepsilon - Ri = 0$$



Aplicação da segunda regra de Kirchhoff

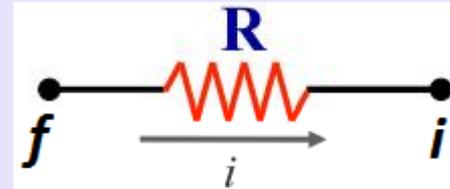
1- Se um resistor for atravessado na direção da corrente, a variação potencial no resistor é $-iR$.

$$\Delta V = V_f - V_i = -Ri$$



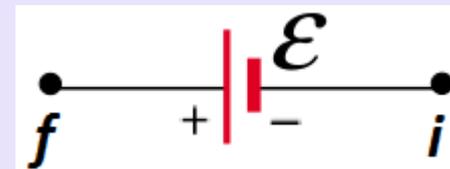
2- Se um resistor for atravessado na direção oposta à da corrente, a variação potencial no resistor é $+iR$.

$$\Delta V = V_f - V_i = +Ri$$



3- Se uma fonte de fem for atravessada na direção da fem (do terminal negativo para o terminal positivo), a variação de potencial é $+\varepsilon$.

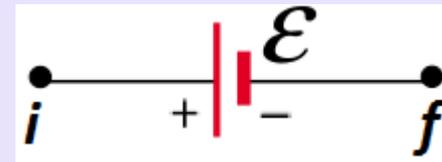
$$\Delta V = V_f - V_i = +\varepsilon$$



Aplicação da segunda regra de Kirchhoff

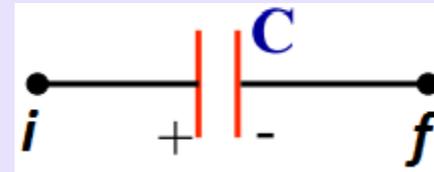
4- Se uma fonte de fem for atravessada na direção oposta à da fem (do terminal positivo para o terminal negativo), a variação de potencial é $-\varepsilon$.

$$\Delta V = V_f - V_i = -\varepsilon$$



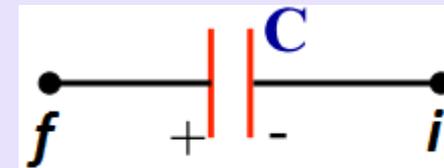
5- Se um capacitor for atravessado na direção oposta à de sua polarização (do terminal positivo para o terminal negativo), a variação de potencial é $-q/C$.

$$\Delta V = V_f - V_i = -\frac{q}{C}$$



6- Se um capacitor for atravessado na direção de sua polarização (do terminal negativo para o terminal positivo), a variação de potencial é $+q/C$.

$$\Delta V = V_f - V_i = +\frac{q}{C}$$



Exemplo:

não existem nós neste circuito



i é a mesma em todos os elementos

$$\sum_i \Delta V_i = 0$$

$$\Delta V_{a \rightarrow b} + \Delta V_{b \rightarrow c} + \Delta V_{c \rightarrow d} + \Delta V_{d \rightarrow a} = 0$$

• Sentido horário

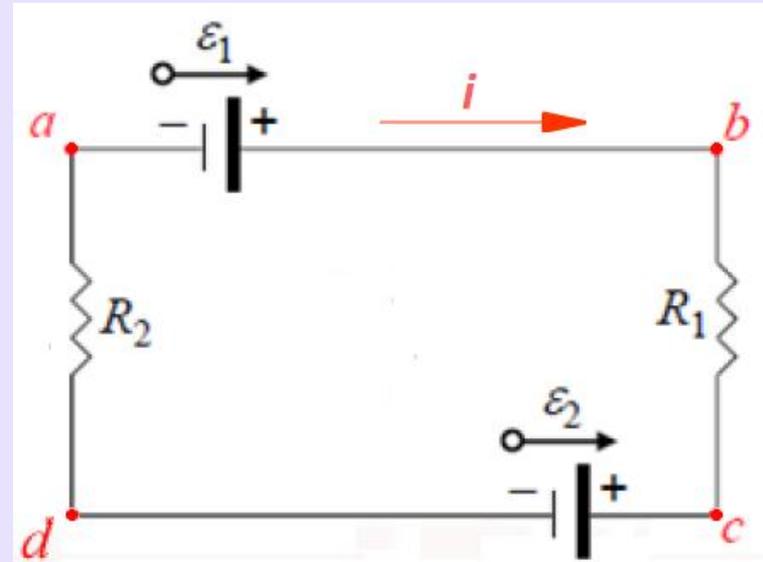
$$\varepsilon_1 - iR_1 - \varepsilon_2 - iR_2 = 0$$

$$i(R_1 + R_2) = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

$$\Rightarrow i = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2}$$



Exemplo:



- Sentido anti-horário

$$\Delta V_{b \rightarrow a} + \Delta V_{a \rightarrow d} + \Delta V_{d \rightarrow c} + \Delta V_{c \rightarrow b} = 0$$

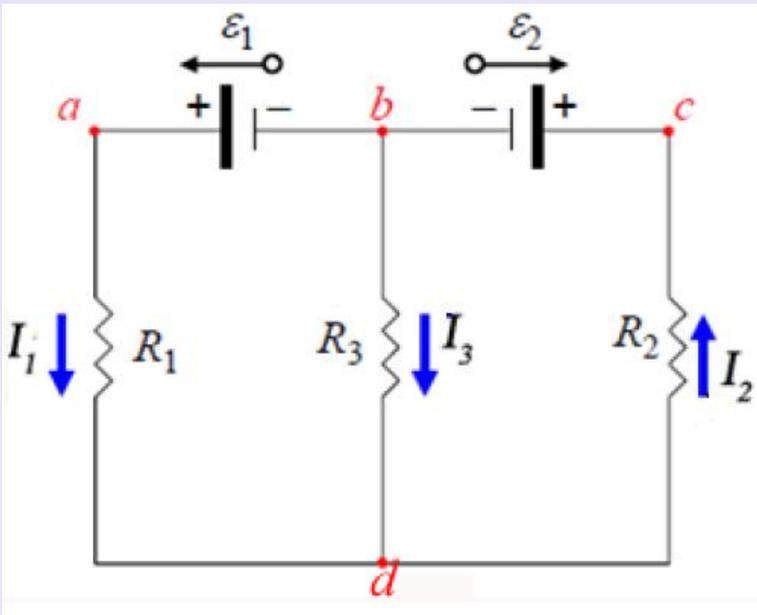
$$-\varepsilon_1 + iR_2 + \varepsilon_2 + iR_1 = 0$$

$$i(R_1 + R_2) = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

$$\Rightarrow i = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2}$$



Exemplo:



Conservação da carga em d \Rightarrow $i_1 + i_3 = i_2$ (I)

Conservação da energia nas duas malhas \Rightarrow $\sum_i \Delta V_i = 0$

percurso escolhido \rightarrow anti-horário

Malha da esquerda $b \mapsto a \mapsto d \mapsto b$

$$\varepsilon_1 - i_1 R_1 + i_3 R_3 = 0 \quad (\text{II})$$

Malha da direita $c \mapsto b \mapsto d \mapsto c$

$$-\varepsilon_2 - i_3 R_3 - i_2 R_2 = 0 \quad (\text{III})$$



Exemplo:

Vamos encontrar i_1 :

1º – escrever i_3 em função de i_1

2º – escrever i_2 em função de i_1

$$(II) \Rightarrow i_3 = \frac{i_1 R_1 - \varepsilon_1}{R_3} \quad (1)$$

$$(III) \Rightarrow i_2 = \frac{-(\varepsilon_2 + i_3 R_3)}{R_2} \quad (2)$$

de (1) e (2) $\Rightarrow i_2 = -\frac{\varepsilon_2}{R_2} - i_3 \frac{R_3}{R_2}$

$$i_2 = -\frac{\varepsilon_2}{R_2} - \frac{R_3}{R_2} \left(\frac{i_1 R_1 - \varepsilon_1}{R_3} \right)$$

$$\Rightarrow i_2 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - i_1 R_1}{R_2}$$

↳ i_2 em função de i_1



Exemplo:

$$\text{Vínculo} \rightarrow i_1 + i_3 = i_2$$

$$\Rightarrow i_1 + \frac{i_1 R_1 - \varepsilon_1}{R_3} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - i_1 R_1}{R_2}$$

$$i_1 + i_1 \frac{R_1}{R_3} - \frac{\varepsilon_1}{R_3} = \frac{\varepsilon_1}{R_2} - \frac{\varepsilon_2}{R_2} - i_1 \frac{R_1}{R_2}$$

$$i_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_3} + \frac{R_1}{R_2} \right) = \frac{\varepsilon_1}{R_3} + \frac{\varepsilon_1}{R_2} - \frac{\varepsilon_2}{R_2}$$

$$i_1 \left(\frac{R_2 R_3 + R_1 R_2 + R_1 R_3}{R_2 R_3} \right) = \frac{\varepsilon_1 R_2 + \varepsilon_1 R_3 - \varepsilon_2 R_3}{R_2 R_3}$$

$$\Rightarrow i_1 = \frac{\varepsilon_1 (R_2 + R_3) - \varepsilon_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$

$$i_2 = \frac{\varepsilon_1 R_3 - \varepsilon_2 (R_1 + R_3)}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$

$$i_3 = \frac{-\varepsilon_1 R_2 - \varepsilon_2 R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$



Amperímetros e Voltímetros

Amperímetro

- Instrumento usado para medir corrente elétrica
- Sempre colocado em série no circuito onde se quer medir a corrente
- Para que a resistência do amperímetro (R_A) não altere o valor da corrente a ser medida:

$$R_{eq} = r + R_1 + R_2 + R_A (R_A \rightarrow 0) \Rightarrow R_{eq} = r + R_1 + R_2$$

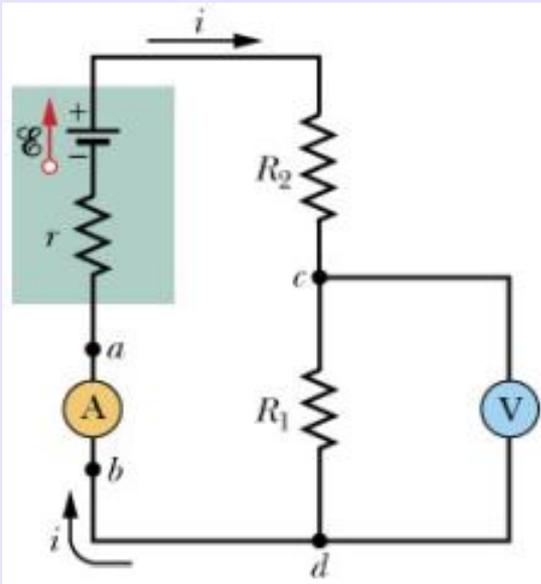
$$\Rightarrow R_A \ll (r + R_1 + R_3)$$

Voltímetro

- Instrumento usado para medir diferença de potencial
- Sempre colocado em paralelo com o trecho onde se quer medir a diferença de potencial
- Para que a resistência do voltímetro (R_V) não altere o valor da diferença de potencial a ser medida:

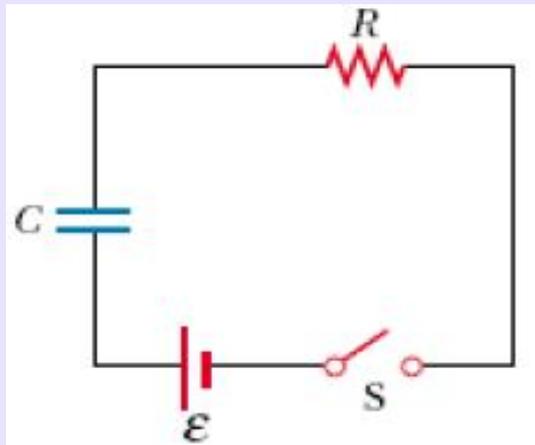
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_V} + \frac{1}{R_1} (R_V \rightarrow \infty) \Rightarrow R_{eq} = R_1 \Rightarrow R_V \gg R_1$$

Na prática, um único instrumento (multímetro) realiza as duas medidas anteriores, além da medida das resistências.

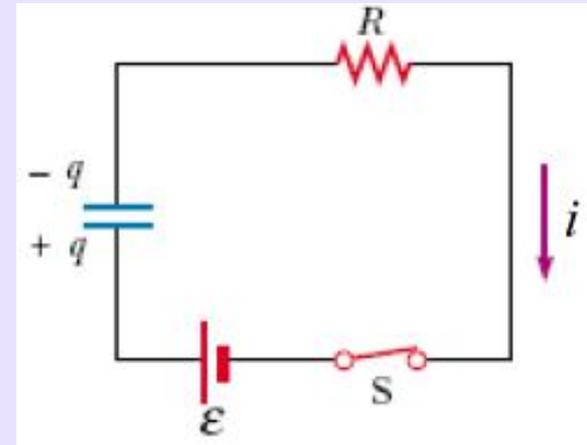


Carregando um circuito RC

$t < 0$



$t \geq 0$



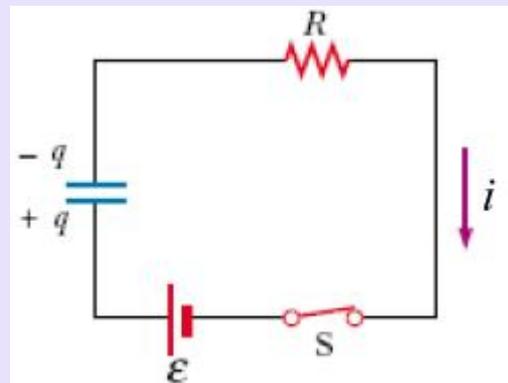
Chave S fechada em $t = 0$

- A carga inicial do capacitor é nula
- Assim que S se fecha, surge uma corrente dependente do tempo no circuito
- Essa corrente inicia o processo de carga do capacitor
- Quando o capacitor estiver carregado a corrente se torna nula

“não há passagem de carga através das placas do capacitor, há apenas transferência de carga para as placas, passando pelo resistor”



Carregando um circuito RC



$$\sum \Delta V = 0 \Rightarrow \Delta V_{\varepsilon} = \Delta V_C + \Delta V_R$$

$$\Delta V_R = iR \rightarrow \text{queda de potencial no resistor}$$

$$\Delta V_C = \frac{q}{C} \rightarrow \text{queda de potencial no capacitor}$$

$$\Rightarrow \varepsilon - iR - \frac{q}{C} = 0 \quad (I)$$

$q = q(t)$ e $i = i(t) \rightarrow$ a corrente varia no tempo

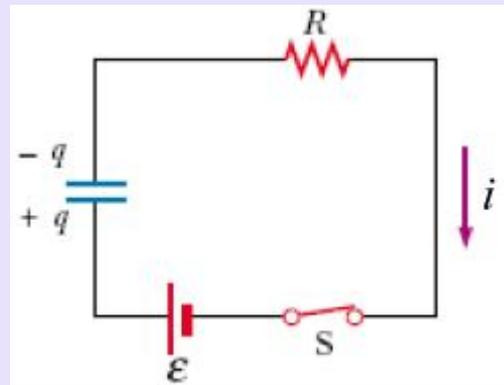
$$\Rightarrow \varepsilon - i(t)R - \frac{q(t)}{C} = 0$$

$t = 0 \Rightarrow$ a chave é fechada \Rightarrow a carga no capacitor é nula $\Rightarrow \varepsilon - i_0 R = 0$

$$\Rightarrow i_0 = \frac{\varepsilon}{R} \leftarrow \text{corrente máxima no circuito}$$



Carregando um circuito RC



Capacitor

$t \rightarrow \infty \Rightarrow$ completamente carregado $\Rightarrow i(t) = 0$

 $\varepsilon - \frac{q_{m\acute{a}x}}{C} = 0$

$\Rightarrow q_{m\acute{a}x} = C\varepsilon$ ← Carga máxima no capacitor

$$i = \frac{dq}{dt} \xrightarrow{eq.I} \varepsilon - R \frac{dq}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{q}{RC}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{C\varepsilon - q}{RC}$$

$$\frac{dq}{C\varepsilon - q} = \frac{dt}{RC}$$



Carregando um circuito RC

integrando

$$\Rightarrow -\ln(C\varepsilon - q) = \frac{t}{RC} + C^{te}$$

Aplicando as condições iniciais: $t = 0, q = 0$

$$-\ln(C\varepsilon - 0) = 0 + C^{te}$$

$$C^{te} = -\ln(C\varepsilon)$$

$$\Rightarrow -\ln(C\varepsilon - q) = \frac{t}{RC} - \ln(C\varepsilon)$$

$$\ln(C\varepsilon - q) - \ln(C\varepsilon) = -\frac{t}{RC}$$

$$\ln\left(\frac{C\varepsilon - q}{C\varepsilon}\right) = -\frac{t}{RC}$$



Carregando um circuito RC

$$1 - \frac{q}{C\varepsilon} = \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

$$q = \underbrace{C\varepsilon}_{q_{\text{máx}}} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right]$$

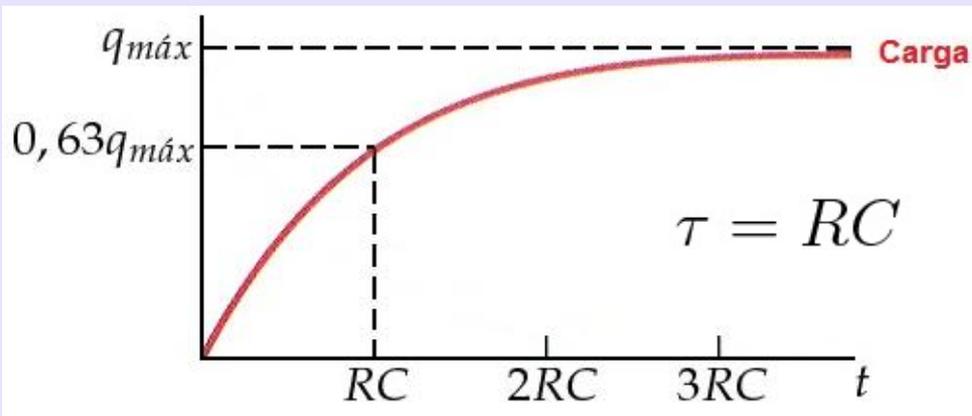
$$q(t) = q_{\text{máx}} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right]; \quad q_{\text{máx}} = C\varepsilon \quad (\text{III})$$

↳ Expressão para a variação da carga com o tempo nas placas do capacitor.

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow q(t) = C\varepsilon \Rightarrow i(t) = 0$$

$$t_0 = 0 \Rightarrow q(t_0) = 0 \Rightarrow i_0 = \frac{\varepsilon}{R}$$

- RC é chamado de constante de tempo, τ , do circuito. $\tau = RC$ é o tempo necessário para o capacitor se carregar do valor $1 - e^{-1} = 0,63$.



Carregando um circuito RC

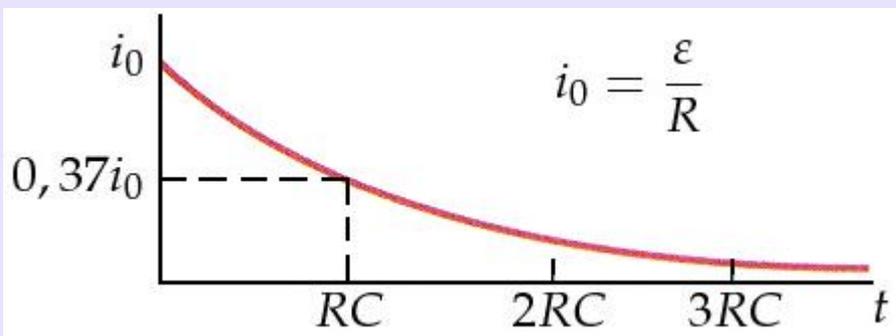
no tempo $t = \tau \Rightarrow q(t) = q_{m\acute{a}x} (1 - e^{-1}) = 0,63 q_{m\acute{a}x}$

$$\tau = RC \Rightarrow q(t) = q_{m\acute{a}x} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)$$

Corrente

derivando a eq. (II) $\Rightarrow \frac{dq(t)}{dt} = i(t) = C\varepsilon \times -\exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \times -\frac{1}{RC}$

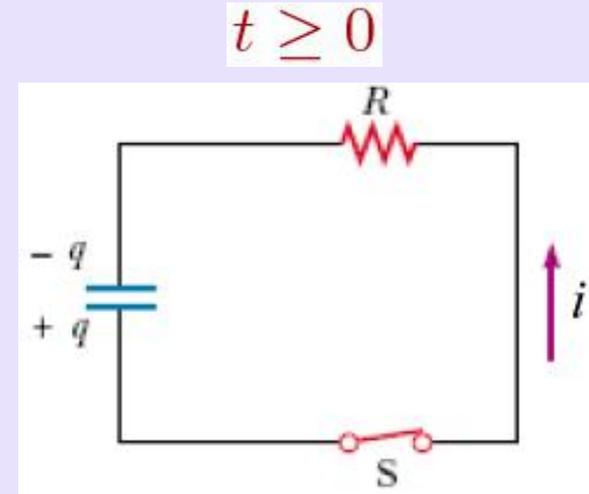
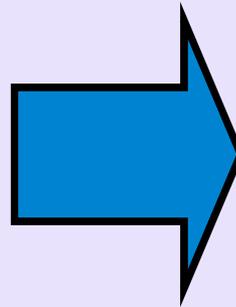
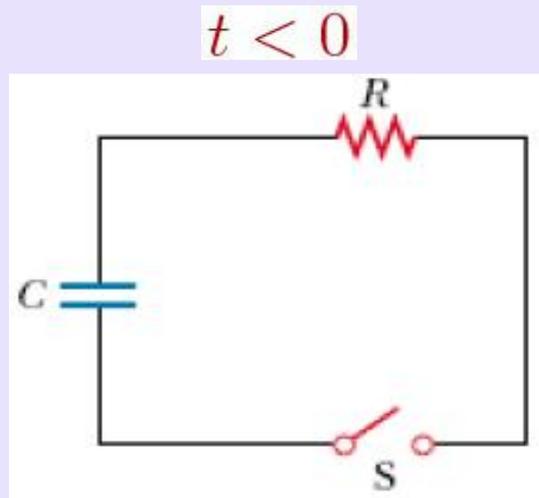
$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (III)$$



Variação da corrente no circuito durante a carga do capacitor



Descarregando um circuito RC

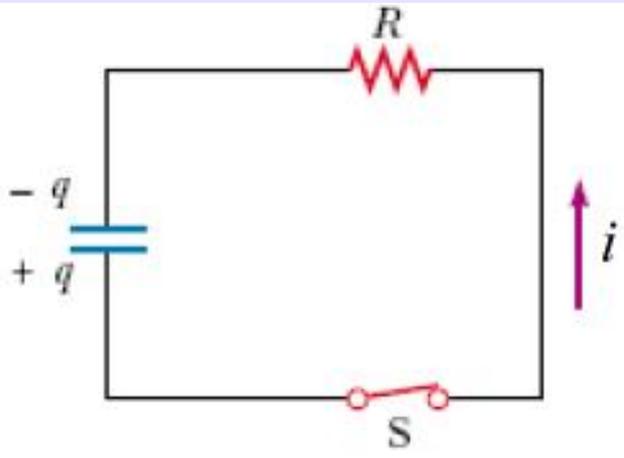


Chave S fechada em $t = 0$

- A carga inicial do capacitor é máxima (em $t=0$ a corrente circulando no circuito é máxima)
- Assim que S se fecha, surge uma corrente dependente do tempo no circuito
- Essa corrente inicia o processo de descarga do capacitor
- Quando o capacitor estiver descarregado a corrente se torna nula



Descarregando um circuito RC



$$\sum \Delta V = 0 \Rightarrow \Delta V_C = \Delta V_R$$

$$\Rightarrow \frac{q}{C} - iR = 0$$

$$i = -\frac{dq}{dt} \Rightarrow R \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{C}$$

 Taxa de redução da carga

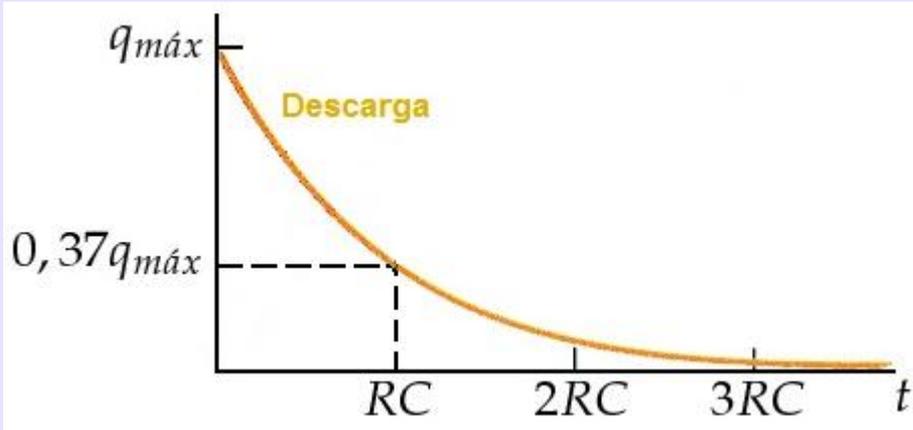
$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} dt$$

$$\int_{q_{m\acute{a}x}}^q \frac{dq'}{q'} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt'$$

$$\ln(q') \Big|_{q_{m\acute{a}x}}^q = -\frac{t}{RC}$$



Descarregando um circuito RC



$$\ln \left(\frac{q}{q_{máx}} \right) = -\frac{t}{RC}$$

$$q(t) = q_{máx} \exp \left(-\frac{t}{RC} \right) \quad (\text{IV})$$

Corrente

$$i = -\frac{dq}{dt} \stackrel{\text{eq.IV}}{\Rightarrow} i(t) = -q_{máx} \times \exp \left(-\frac{t}{RC} \right) \times -\frac{1}{RC}$$

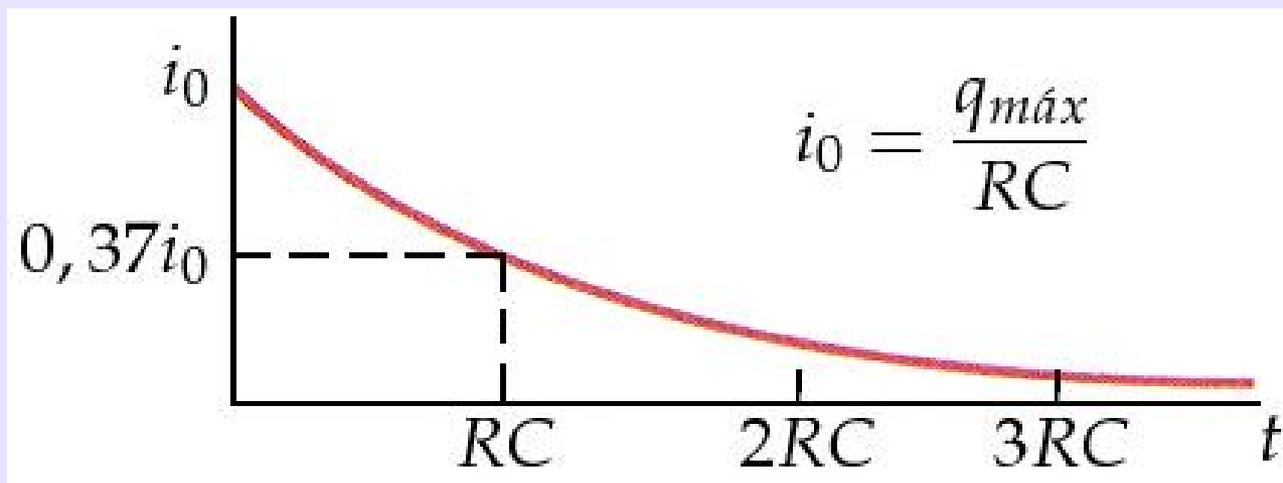
$$i(t) = \underbrace{\frac{q_{máx}}{RC}}_{i_0} \exp \left(-\frac{t}{RC} \right)$$



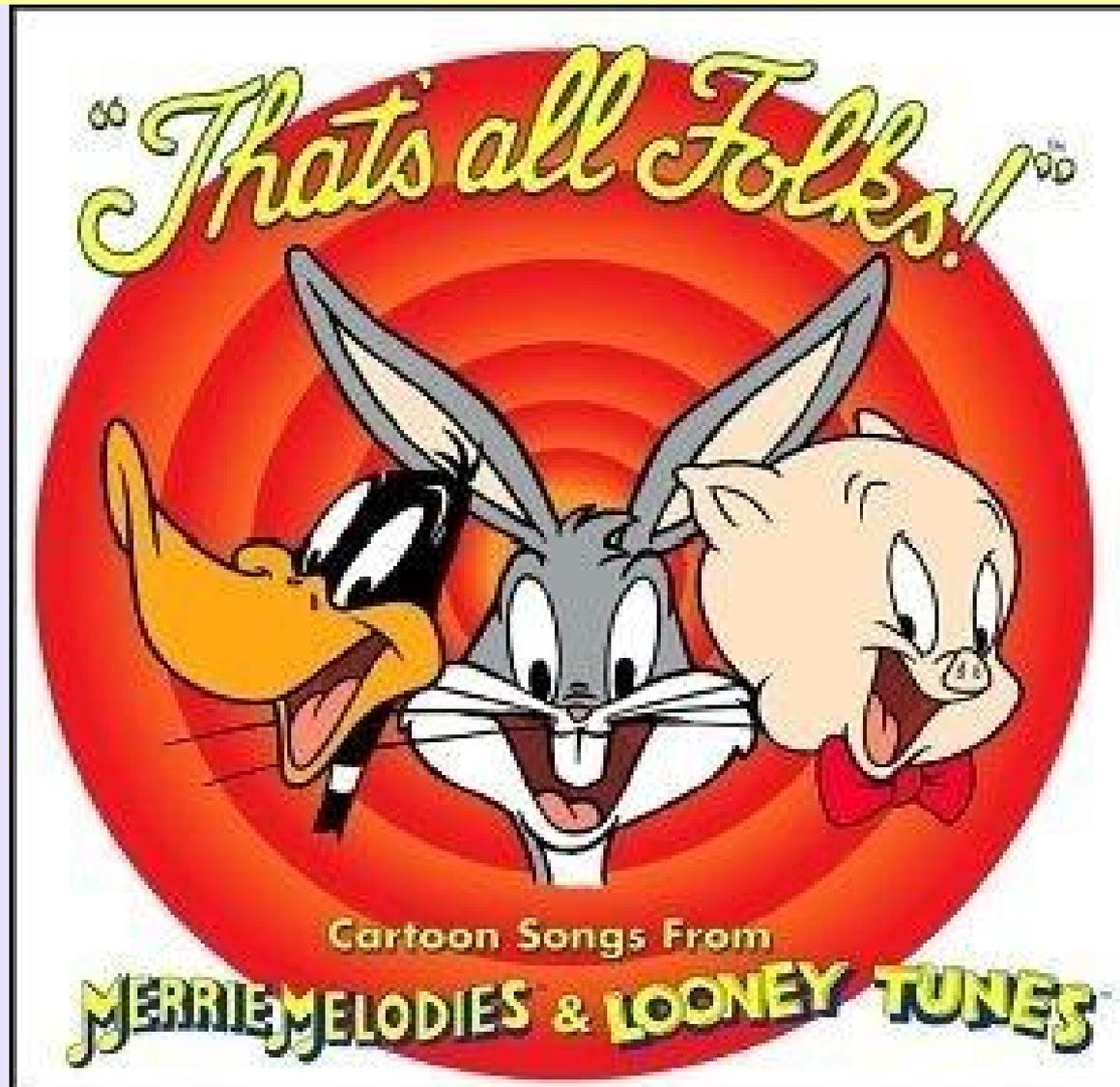
Descarregando um circuito RC

$$i(t) = i_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad (\text{V})$$

Note que tanto na eq.(III) como na eq.(V) a corrente diminui exponencialmente até zero, como era de se esperar.



FIM



INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense